Máximo Matemática A 12

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

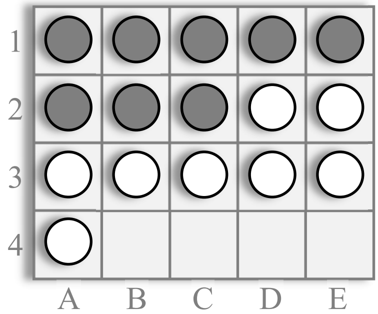
12.º Ano de escolaridade

Duração: 90 minutos | **Data**:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representado um tabuleiro retangular dividido em vinte quadrados iguais, dispostos em quatro linhas (1, 2, 3 e 4) e cinco colunas (A, B, C, D e E):

Pretende-se colocar sobre este tabuleiro, situado à nossa frente, 16 peças de igual tamanho e feitio, das quais oito são brancas e oito são pretas.



Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.

1.1. De quantas maneiras podem as peças ser colocadas no tabuleiro?

1.2. De quantas maneiras podem as peças ser colocadas no tabuleiro de forma que uma linha fique totalmente ocupada com peças pretas e outra linha fique totalmente ocupada com peças brancas.

1.3. Suponha agora que apenas são colocadas no tabuleiro as oito peças pretas.
Admitindo que as peças são colocadas ao acaso, qual é o valor, na forma de percentagem arredondado às décimas, da probabilidade de ficar uma linha totalmente preenchida?

(A) 5,8% **(B)** 7,2% **(C)** 1,4% **(D)** 0,4%

2. Sabe-se que a soma do terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal com o terceiro elemento da linha seguinte é igual a 900.
Quantos elementos tem a primeira dessas linhas?

3. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{12}$, com $x>0$, não depende da variável x.

Qual é o valor desse termo?

(A) 495 **(B)** -495 **(C)** 7920 **(D)** -7920

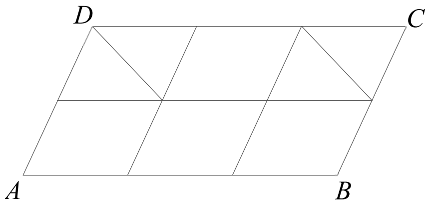
4. Considere a palavra ***TABULEIRO*** e todas as palavras de nove letras, com ou sem significado, que se podem formar trocando a ordem a letras desta palavra.

4.1. Em quantas dessas palavras não figuram duas consoantes seguidas?

4.2. Em quantas dessas palavras é mantida a ordem das vogais (***AUEIO***)?

4.3. Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, determine, na forma de fração irredutível, a probabilidade de as consoantes aparecerem todas seguidas

5. O paralelogramo $[ABCD]$ da figura foi dividido em seis paralelogramos iguais. Dois desses paralelogramos foram ainda divididos, cada um, em dois triângulos iguais.
O paralelogramo ficou assim dividido em oito partes: quatro paralelogramos e quatro triângulos.
A figura obtida vai ser pintada.
Sabe-se que:



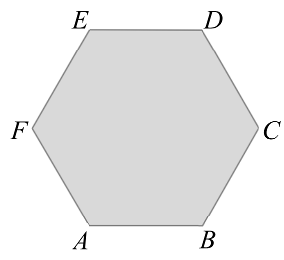
- estão disponíveis sete cores;
- cada uma das oito partes é pintada de uma única cor;
- partes geometricamente iguais são pintadas de cores diferentes;
- cada uma das cores utilizadas cobre uma mesma área.

De quantas maneiras diferentes pode ser pintado o paralelogramo $[ABCD]$?

(A) ${}^7A_4 \times 4!$ **(B)** ${}^7A_4 \times {}^7A_4$

(C) ${}^7C_4$ **(D)** ${}^7C_4 \times 4!$

6. Escolhem-se, ao acaso, quatro vértices distintos do hexágono regular $[ABCDEF]$.



Qual é a probabilidade de esses quatro pontos serem vértices de um retângulo?

(A) $\frac{2}{15}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{4}{15}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

7. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset S \text{ e } B \subset S)$ tais que:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(B)P(\overline{A}) = P(\overline{B})$$

Mostre que os acontecimentos A e B são independentes.

8. Numa caixa (caixa 1) foram introduzidas bolas brancas e bolas pretas. Por cada bola branca foram introduzidas duas bolas pretas.

Uma segunda caixa (caixa 2) tem apenas bolas pretas.

Uma terceira caixa (caixa 3) está vazia.

As bolas são indistinguíveis ao tato.

8.1. Considere a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada uma das caixas 1 e 2, colocá-las na caixa 3 e, em seguida, retirar, também ao acaso, uma bola da caixa 3.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «A bola retirada da caixa 1 é preta.»

B: «A bola retirada da caixa 3 é preta.»

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$.

8.2. Admita agora que todas as bolas, num total de 15, são colocadas num saco.

Sabe-se que na extração, simultânea e ao acaso, de duas bolas do saco, a probabilidade de serem ambas pretas é $\frac{1}{5}$.

Determine o número de bolas pretas que estão no saco.

9. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{2x^2-5x+3} & \text{se } x<1 \\ \sqrt{x-1}-x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

9.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota do seu gráfico, quando $x\to+\infty$.

9.2. Averigue se a função é contínua em $x=1$

10. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ sabe-se que a reta de equação $y=3x-6$ é uma assíntota ao seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{3x^2}{f(x)}\right)$?

(A) 3 **(B)** -6 **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** -2

FIM

Cotações

1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.	Total
10	10	10	15	10	10	15	15	10	10	15	15	15	15	15	10	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. $^{20}C_8 \times {}^{12}C_8 = 62\,355\,150$

$^{12}C_8$: Número de maneiras de escolher oito casas para as peças pretas entre as restantes 12.

$^{20}C_8$: Número de maneiras de escolher oito casas para as peças brancas entre as 20 disponíveis.

1.2. $^{4}A_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_3 = 50\,400$

$^{7}C_3$: Número de maneiras de escolher três casas para as restantes três peças pretas.

$^{10}C_3$: Número de maneiras de escolher três casas entre as restantes 10 para as três peças brancas por colocar.

$^{4}A_2$: Número de maneiras de escolher ordenadamente as duas linhas a ocupar, uma com bolas brancas e a outra com pretas.

1.3. Número de casos possíveis: $^{20}C_8 = 125\,970$

Número de casos favoráveis: $4 \times {}^{15}C_3 = 1820$

$$P = \frac{4 \times {}^{15}C_3}{^{20}C_8} \approx 0,014 \approx 1,4\%$$

Resposta: (C)

2. Terceiro elemento da linha de ordem n: $^{n}C_2$

Terceiro elemento da linha seguinte: $^{n+1}C_2$

$^{n}C_2 + {}^{n+1}C_2 = 900 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{^{n}A_2}{2!} + \frac{^{n+1}A_2}{2!} = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 + n^2}{2} = 900 \Leftrightarrow \frac{2n^2}{2} = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 900 \Leftrightarrow n = \sqrt{900} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 30$$

A linha de ordem 30 tem 31 elementos.

3. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{12}=\sum_{p=0}^{12}{}^{12}C_p\left(\sqrt{x}\right)^{12-p}\left(-\frac{2}{x}\right)^p$

$${}^{12}C_p\left(\sqrt{x}\right)^{12-p}\left(-\frac{2}{x}\right)^p={}^{12}C_p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-p}\left((-2)x^{-1}\right)^p=$$

$$={}^{12}C_p x^{\frac{12-p}{2}}(-2)^p x^{-p}={}^{12}C_p(-2)^p x^{\frac{12-p}{2}-p}$$

Esta expressão não depende da variável x se, e só se,

$$\frac{12-p}{2}-p=0 \Leftrightarrow 12-p-2p=0 \Leftrightarrow 3p=12 \Leftrightarrow p=4$$

O termo que não depende da variável x é ${}^{12}C_4(-2)^4x^0=495\times 16=7920$

Resposta: (C)

4.

4.1. $5!\times {}^6A_4=120\times 360=43\,200$

Número de maneiras de escolher ordenadamente lugar para as 4 consoantes TBLR entre as vogais $\underset{1}{|}A\underset{2}{|}E\underset{3}{|}I\underset{4}{|}O\underset{5}{|}U\underset{6}{|}$

Número de maneiras de ordenar as 5 vogais

4.2. É possível formar $9!$ palavras diferentes.

As cinco vogais podem ser ordenadas de $5!$ maneiras diferentes.

O número de maneiras de ordenar as 9 letras mantendo a ordem das vogais é $\frac{9!}{5!}=3024$.

4.3. Número de casos possíveis: $9!$

Número de casos favoráveis:

$4!\times 5!\times 6=17\,280$

Número possíveis lugares para o grupo das consoantes entre as vogais: $\underset{1}{|}v_1\underset{2}{|}v_2\underset{3}{|}v_3\underset{4}{|}v_4\underset{5}{|}v_5\underset{6}{|}$

Número de maneiras de ordenar as vogais

Número de maneiras de ordenar as consoantes

$$P=\frac{4!\times 5!\times 6}{9!}=\frac{4\times 3\times 2\times 5!\times 6}{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}=\frac{3}{9\times 7}=\frac{1}{3\times 7}=\frac{1}{21}$$

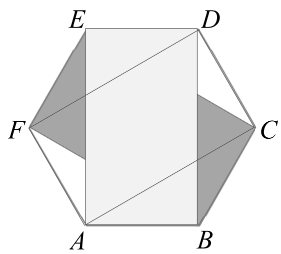
5. Número de maneiras de escolher ordenadamente as quatro cores diferentes para os triângulos: ${}^7A_4$

As cores a usar nos quadriláteros têm que ser as mesmas. É a única maneira de as cores ocuparem a mesma área (cada cor pinta 1 triângulo + 1 quadrilátero).
O número de maneiras de pintar os quadriláteros usando as quatro cores já escolhidas é: $P_4 = 4!$

Portanto, o paralelogramo $[ABCD]$ pode ser pintado de ${}^7A_4 \times 4!$ maneiras diferentes.

Resposta: (A)

6. Número de casos possíveis: ${}^6C_4 = {}^6C_2 = \dfrac{6\times 5}{2} = 15$



Número de casos favoráveis: 3 ($[ABDE]$, $[BCEF]$ e $[CDFA]$)

$P = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

Resposta: (B)

7. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(B)P(\overline{A}) = P(\overline{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) - P(B)[1 - P(A)] = 1 - P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(B) + P(B)P(A) = 1 - P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -P(A \cap B) + P(B)P(A) = 0 \Leftrightarrow$

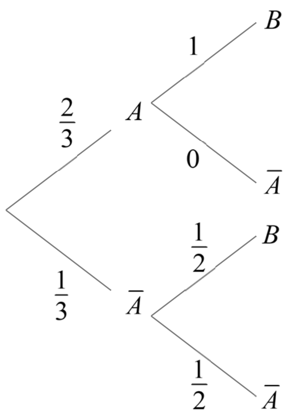
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A)$

Logo, se $P(A \cap B) = P(B)P(A)$, os acontecimentos A e B são independentes.

8.

8.1. Se por cada bola branca introduzida na caixa 1 foram introduzidas duas bolas pretas então a terça parte das bolas que ficaram na caixa 1 são brancas. Logo, $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

O diagrama em árvore ilustra a situação:



Se saiu bola preta da caixa um ficaram 2 bolas pretas e 0 brancas na caixa 3

Se saiu bola branca da caixa um ficaram 1 bola branca e 1 bola preta na caixa 3

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 1}{\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{2\times 6}{5\times 3}=\frac{4}{5}$$

8.2. Na extração, simultânea e ao acaso, de duas bolas do saco, a probabilidade de serem ambas pretas é dada por $\frac{^nC_2}{^{15}C_2}$,sendo n é o número de bolas pretas que estão no saco.

$$\frac{^nC_2}{^{15}C_2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{15\times 14}{2}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{15\times 14}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow n^2-n=\frac{15\times 14}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-n=3\times 14\Leftrightarrow n^2-n-42=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times 42}}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{169}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm 13}{2}\underset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n=7$$

No saco, estão 7 bolas pretas.

9.

9.1 Seja $y=mx+b$ a equação reduzida da assíntota ao gráfico da função f , quando $x\to+\infty$, caso exista:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-x}{x}\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}-\frac{x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}-1\right)=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}{x\times\sqrt{x-1}}=$$

$$=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\sqrt{x-1}}=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x-1}}=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x-1}}=$$

$$=-1+\frac{1-0}{+\infty}=-1+0=-1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, podemos concluir que não existe assíntota ao gráfico da função f , quando $x\to+\infty$.

9.2. A função f é contínua no ponto 1 se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{2x^2-5x+3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} =$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{2x-3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\sqrt{x-1} - x\right) = \sqrt{1-1} - 1 = -1$$

$$f(1) = \sqrt{1-1} - 1 = -1$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Logo, a função f é contínua em $x = 1$.

10. Se que a reta de equação $y = 3x - 6$ é uma assíntota ao gráfico da função f (quando $x \to +\infty$) então $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - 3x\right] = -6$

Logo,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - \frac{3x^2}{f(x)}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x f(x) - 3x^2}{f(x)}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{f(x) - 3x}{\frac{f(x)}{x}}\right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - 3x\right]}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{-6}{3} = -2$$

Resposta: (D)