

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

1.1. Tem-se que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - x - 5y - 8z + r \leq 0 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{y^2 - 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2} + \underbrace{z^2 - 8z + 4^2}_{(z-4)^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 - r \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (z-4)^2 \leq \frac{45}{2} - r \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do centro da esfera são $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4\right)$, ou seja, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4\right)$.

1.2. Tem-se que:

- a esfera é tangente à base superior do cubo no ponto P , isto é, é tangente ao plano ABC no ponto P , pelo que a recta QP é perpendicular ao plano ABC , sendo P o ponto de intersecção entre a recta QP e o plano ABC .

Assim, dado que QP é perpendicular ao plano ABC , um vector normal a ABC é um vector director de QP e portanto, como $\vec{n}(1, -1, -2)$ é normal a ABC , vem que um vector director de QP é $\vec{n}(1, -1, -2)$, vem que:

$$QP:(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 4\right) + k(1, -1, -2), k \in \mathbb{R}$$

Logo, as coordenadas de um ponto genérico da recta QP são $\left(\frac{1}{2} + k, \frac{5}{2} - k, 4 - 2k\right)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que, substituindo na equação do plano ABC , vem:

$$\frac{1}{2} + k - \left(\frac{5}{2} - k\right) - 2(4 - 2k) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + k - \frac{5}{2} + k - 8 + 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow 6k - 9 = 0 \Leftrightarrow 6k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{6} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Logo, a recta QP intersecta o plano ABC num ponto em que $k = \frac{3}{2}$, pelo que $P\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2} - \frac{3}{2}, 4 - 2 \times \frac{3}{2}\right)$, ou seja:

$$P(2, 1, 1)$$

- o volume do sólido é dado por $V_{cubo} + V_{esfera} = \overline{AB}^3 + \frac{4}{3}\pi \times \overline{QP}^3$.

Assim:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = (\overline{2DP})^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 4\overline{DP}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2\overline{DP}^2$$

$\begin{array}{l} AD=AB \\ BD=2DP \end{array}$

O ponto D pertence à recta definida por $x=1 \wedge z=0$, pelo que $D(1, y_D, 0)$ e D também pertence a ABC , pelo que $1 - y_D - 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y_D = 2 \Rightarrow D(1, 2, 0)$.

Logo, $\overline{DP} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ e portanto:

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{DP}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 \times (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2 \times 3 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 6 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{6} \Rightarrow \overline{AB}^3 = (\sqrt{6})^3 = 6\sqrt{6}$$

$\begin{array}{l} AB > 0 \end{array}$

$$\overline{QP} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{27}{2}}, \text{ pelo que:}$$

$$\overline{QP}^3 = \left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{27}{2} \times \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{2}} = \frac{27}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{27 \times 3\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{e portanto } \frac{4}{3}\pi \times \overline{QP}^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{27 \times 3\sqrt{6}}{4} = 27\sqrt{6}\pi.$$

$$\therefore V_{sólido} = \overline{AB}^3 + \frac{4}{3}\pi \times \overline{QP}^3 = 6\sqrt{6} + 27\sqrt{6}\pi = 3\sqrt{6}(2 + 9\pi).$$

Itens Extra:

- a) O número de casos possíveis é ${}^{10}C_3$, que é o número de maneiras de escolher três dos dez pontos assinalados.

Os planos perpendiculares a EFG são:

- EFG , BCH , ABG e ADE , pelo que para este caso temos $4 \times {}^4C_3$ maneiras distintas de formar um plano perpendicular a EFG (em cada um destes planos existem quatro pontos, dos quais escolhem-se três);
- DEG e ACH , pelo que para este caso temos $2 \times ({}^6C_3 - 1)$ maneiras distintas de formar um plano perpendicular a EFG (em cada um destes planos existem seis pontos, P e Q pertencem a ambos, dos quais se escolhem três. No entanto as escolhas BPD e APC não formam um plano, dado que os três pontos são colineares)

Assim, o número de casos possíveis é $4 \times {}^4C_3 + 2 \times ({}^6C_3 - 1)$ e a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{4 \times {}^4C_3 + 2 \times ({}^6C_3 - 1)}{{}^{10}C_3} = \frac{9}{20}$$

b) Um vector normal ao plano ACH é $\vec{PD} = D - P = (1, 2, 0) - (2, 1, 1) = (-1, 1, -1)$. Como $P(2, 1, 1)$ pertence ao plano ACH , vem que:

$$ACH : -1(x - 2) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 + y - 1 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow -x + y - z = -2 \stackrel{x(-1)}{\Leftrightarrow} x - y + z = 2$$

c) Tem-se que os vectores $\vec{PD}(-1, 1, -1)$ e $\vec{n}(1, -1, -2)$ (vector normal a ABC) são dois vectores não colineares paralelos a DEG (em vez de \vec{n} podemos usar \vec{PQ} , dado que são colineares).

Assim, sendo $\vec{n}_{DEG}(a, b, c)$ um vector normal a DEG , vem que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n}_{DEG} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{n}_{DEG} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{DEG} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{n}_{DEG} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c = \textcolor{red}{a - b} \\ \textcolor{red}{a - b} - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -c = a - b \\ -c - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c = a - b \\ -3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a - b \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\vec{n}_{DEG}(b, b, 0)$, com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que, fazendo $b = 1$ se tem $\vec{n}_{DEG}(1, 1, 0)$ e portanto, como $D(1, 2, 0)$ pertence ao plano DEG , conclui-se que:

$$DEG : 1(x - 1) + 1(y - 2) - 0(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 3$$

2. Como os números são pares, existem cinco possibilidades para a posição das unidades, 0, 2, 4, 6 e 8. Das restantes quatro posições escolhem-se duas para colocar os dois 3, o número de maneiras de o fazer é 4C_2 . Para as restantes duas posições escolhem-se ordenadamente dois dos restantes oito algarismos, o número de maneiras de o fazer é 8A_2 . Logo, temos $5 \times {}^4C_2 \times {}^8A_2$ possibilidades.

No entanto, a contagem anterior considera o número 0 na primeira posição, pelo que temos de excluir essas hipóteses. Assim, para a primeira posição temos apenas uma hipótese, o 0, e para a posição das unidades temos quatro hipóteses, todos os algarismos pares à exceção do 0. Das restantes três posições escolhem-se duas para os dois 3, o número de maneiras de o fazer é 3C_2 . Para a posição que sobra temos 7 hipóteses. Logo, temos $1 \times {}^3C_2 \times 7 \times 4$ possibilidades.

Assim, o número pedido é $5 \times {}^4C_2 \times {}^8A_2 - 1 \times {}^3C_2 \times 7 \times 4 = 1596$.

Resposta: C

3. Tem-se que:

$$\bullet P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow P(A) - \cancel{P(A \cap B)} = P(B) - \cancel{P(A \cap B)} \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

$$\bullet P(A|B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{P(B)}{3}$$

$$\bullet P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \underbrace{P(\bar{A} \cap \bar{B})}_{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)} = \frac{5P(\bar{B})}{6} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{5(1 - P(B))}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{P(B)}{3}} = \frac{5 - 5P(B)}{6} \Leftrightarrow 1 - P(B) - P(B) + \frac{P(B)}{3} = \frac{5 - 5P(B)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6 - 6P(B) - 6P(B) + 2P(B) = 5 - 5P(B) \Leftrightarrow -10P(B) + 5P(B) = 5 - 6$$

$$\Leftrightarrow -5P(B) = -1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

Resposta: A

4. Sendo n o número de rapazes tem-se que o número de casos possíveis é $(n+3)!$, que é o número de maneiras dos $n+3$ permutarem nas $n+3$ posições de descida.

Para o número de casos favoráveis começamos por agrupar as três raparigas num bloco. Esse bloco e os n rapazes (que contam como $n+1$ “pessoas”, dado que o bloco conta como uma pessoa) permitem entre si de $(n+1)!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras as três raparigas permitem entre si, no bloco, de $3!$ maneiras distintas.

Logo, o número de casos favoráveis é $(n+1)! \times 3!$, pelo que a probabilidade, em função de n , de as três raparigas descerem consecutivamente é dada por $\frac{(n+1)! \times 3!}{(n+3)!}$.

$$\text{Portanto, } \frac{(n+1)! \times 3!}{(n+3)!} = \frac{1}{51} \Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times 6}{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \frac{1}{51} \Leftrightarrow 6 \times 51 = n^2 + 5n + 6 \Leftrightarrow n^2 + 5n - 300 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-300)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -20 \vee n = 15$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 15$, pelo que o grupo é constituído por $15 + 3 = 18$ pessoas.

5. Como a recta BC é tangente à circunferência no ponto B , vem que as rectas BC e AB são perpendiculares, pelo que $m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}}$.

Assim, como um vector director de AB é $\vec{AB} = B - A = (5, -1) - (4, 2) = (1, -3)$, vem que $m_{AB} = \frac{-3}{1} = -3$, pelo que

$$m_{BC} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Logo, $BC: y = \frac{1}{3}x + b$ e como $B \in BC$, vem que $-1 = \frac{1}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -1 - \frac{5}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{8}{3} \Rightarrow BC: y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

Mas C pertence ao eixo Ox , pelo que $C(x_C, 0)$ e como $B \in BC$, tem-se:

$$0 = \frac{1}{3} \times x_C - \frac{8}{3} \Leftrightarrow 0 = x_C - 8 \Leftrightarrow x_C = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

Portanto, um vector director da recta AC é $\vec{AC} = C - A = (8, 0) - (4, 2) = (4, -2)$, pelo que o declive da recta AC é $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

∴ Sendo α a inclinação da recta AC , vem que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$, pelo que $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx 153,4^\circ$.

Resposta: C

6. Tem-se que:

- se (u_n) é limitada, então existem $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $m_1 < u_n < M_1, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, se (v_n) é convergente, então limitada, pelo que existem $m_2, M_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$m_2 < v_n < M_2 \Leftrightarrow -M_2 < -v_n < -m_2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, como $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$, vem que $m_1 - M_2 < u_n - v_n < M_1 - m_2, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão de termo geral $u_n - v_n$ é limitada.

Logo, a afirmação da opção A é verdadeira.

- a afirmação da opção **B** é falsa.

Considerando $u_n = (-1)^n$ e $v_n = \frac{1}{n}$, tem-se que (u_n) é limitada, pois $-1 \leq u_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e (v_n) é convergente, pois $v_n \rightarrow 0$.

No entanto, a sucessão de termo geral $u_n + v_n$ não é convergente, dado que não existe $\lim(u_n + v_n)$.

De facto, para n par, tem-se $\lim(u_n + v_n) = \lim\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$, e para n ímpar, tem-se:

$$\lim(u_n + v_n) = \lim\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right) = \lim\left(-1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + 0 = -1$$

- a afirmação da opção **C** é falsa. Considerando $u_n = (-1)^n$ e $v_n = \frac{1}{n}$, tem-se que $\frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n}{\frac{1}{n}} = (-1)^n n$.

Assim, para n par tem-se $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \lim((-1)^n n) = \lim(n) = +\infty$, o que implica que a sucessão de termo geral $\frac{u_n}{v_n}$ não é majorada e, portanto, não é limitada.

- a afirmação da opção **D** é falsa.

Considerando $u_n = (-1)^n$ e $v_n = 2$, tem-se que (v_n) é convergente por ser constante, o seu limite é 2.

Assim, tem-se que $u_n \times v_n = (-1)^n \times 2 = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, pelo que a sucessão de termo geral $u_n \times v_n$ não é

convergente, dado que para n par se tem $\lim(u_n \times v_n) = 2$ e para n ímpar se tem $\lim(u_n \times v_n) = -2$.

Resposta: A

7. Tem-se que:

- a , 3 e a^2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão r_1 , pelo que $r_1 = a^2 - 3 = 3 - a$, de onde:

$$a^2 - 3 = 3 - a \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 2$$

- a e a^2 são dois termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão r_2 , pelo que $r_2 = \frac{a^2}{a} = a$.

Como a progressão geométrica é não monótona, vem que $r_2 < 0$, ou seja, $a < 0$, pelo que, como $a = -3 \vee a = 2$, conclui-se que $a = -3$. Portanto, $r_2 = a = -3$ e $r_1 = a^2 - 3 = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$.

$$\text{Assim, } u_n = \frac{r_2 n + r_1}{2n+1} = \frac{-3n+6}{n+1}.$$

Finalmente, para estudar a monotonia de (u_n) temos de estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-3(n+1)+6}{2(n+1)+1} - \frac{-3n+6}{2n+1} = \frac{-3n+3}{2n+3} - \frac{-3n+6}{2n+1} = \frac{(-3n+3)(2n+1) - (-3n+6)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \frac{-6n^2 - 3n + 6n + 3 + 6n^2 + 9n - 12n - 18}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{3n - 3n - 15}{(2n+3)(2n+1)} = -\frac{15}{(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

Como $(2n+3)(2n+1) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem que $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) é monótona decrescente.

8.

8.1. Se o afixo $(z_2)^3$ pertence à circunferência de raio 8 centrada na origem, então $|z_2|^3 = 8$. Assim, como $(z_2)^3$ é um número real negativo, vem que $(z_2)^3 = -8$. Logo:

$$(z_2)^3 = -8 \Leftrightarrow \underbrace{(re^{i\alpha})^3}_{-8=e^{i\pi}} = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow r^3 e^{i(3\alpha)} = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, $r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$ e $3\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in]0, \pi[$, vem que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pelo que $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$.

Resposta: B

8.2. Tem-se que:

$$\bullet |z_2(1-i)| = 1 \Leftrightarrow |z_2| \times |1-i| = 1 \Leftrightarrow |z_2| \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1 \Leftrightarrow |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- o afixo de z_2 tem as coordenadas simétricas, pelo que pertence à bissecriz dos quadrantes pares.

Assim, como $\alpha \in]0, \pi[$ (é um argumento de z_2), vem que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, pelo que $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e portanto:

$$(z_2)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{4} \times 3\right)} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}_1 + (z_2)^3}{-2 - i^{15}} - \frac{3}{2} e^{i\frac{3\pi}{2}} &= \frac{2 + 3i + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i}{-2 + i} - \frac{3}{2}(-i) = \frac{\frac{8+12i+1+i}{4}}{-2+i} + \frac{3}{2}i = \frac{9+13i}{-8+4i} \times \frac{-8-4i}{-8-4i} + \frac{3}{2}i = \\ &= \frac{-72 - 36i - 104i - 52i^2}{(-8)^2 - (4i)^2} + \frac{3}{2}i = \frac{-72 - 140i + 52}{64 + 16} + \frac{3}{2}i = \frac{-20 - 140i}{80} + \frac{3}{2}i \\ &= -\frac{20}{80} - \frac{140}{80}i + \frac{3}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}i + \frac{3}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

Escrevendo $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ na forma trigonométrica, vem:

$$\left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- sendo θ um argumento de $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$, tem-se que θ pertence ao terceiro quadrante e $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = 1$, pelo que θ

pode ser $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

$$\therefore \frac{\bar{z}_1 + (z_2)^3}{-2 - i^{15}} - \frac{3}{2} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

9.

9.1. A terceira meia hora do teste corresponde ao intervalo $\left[1,1 + \frac{1}{2}\right] = \left[1, \frac{3}{2}\right]$, pelo que a taxa média de variação da altitude do avião durante a terceira meia hora é dada por:

$$t.m.v_{\left[1, \frac{3}{2}\right]} = \frac{h\left(\frac{3}{2}\right) - h(1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{h\left(\frac{3}{2}\right) - h(1)}{\frac{1}{2}} = 2\left(h\left(\frac{3}{2}\right) - h(1)\right)$$

Tem-se que:

- $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{3}{2} \times 0 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 0 - 1 + 3 = 2$
- $h(1) = 1 \times \cos(\pi \times 1) - \sin\left(\frac{\pi \times 1}{3}\right) + 3 = 1 \times (-1) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $t.m.v_{\left[1, \frac{3}{2}\right]} = 2\left(h\left(\frac{3}{2}\right) - h(1)\right) = 2 \times \left(2 - \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

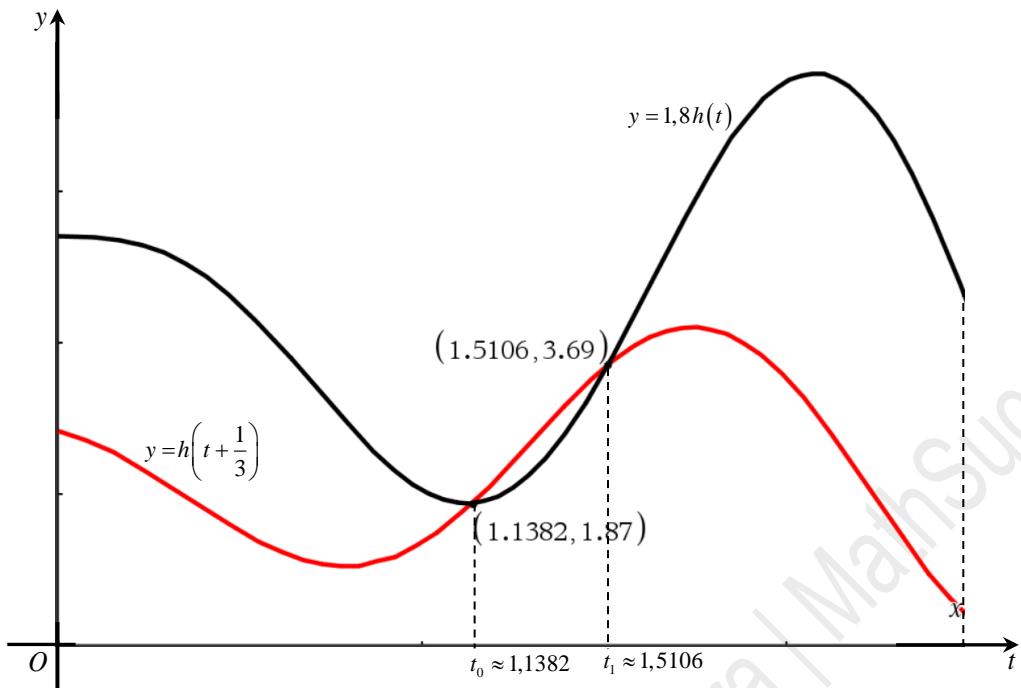
Resposta: C

9.2. Tem-se que durante as duas horas e meia do teste existiram dois instantes, t_0 e t_1 , tais que passados vinte minutos a altitude do avião aumentou 80%, pelo que se pretende determinar os valores de t tais que $h\left(t + \frac{1}{3}\right) = 1,8h(t)$:

- vinte minutos correspondem a $\frac{1}{3}$ da hora;
- se a altitude do avião aumenta 80% passados vinte minutos de um certo instante t , então a altitude passa a ser igual à altitude nesse instante t , dada por $h(t)$, mais 80% dessa altitude, dada por $0,8h(t)$, ou seja:

$$h(t) + 0,8h(t) = 1,8h(t)$$

Assim, utilizando as capacidades gráficas da calculadora, define-se $y_1 = h\left(t + \frac{1}{3}\right)$ e $y_2 = 1,8h(t)$ na janela de visualização $\left[0, \frac{5}{2}\right] \times [0, 8]$:



Tem-se que $h\left(t + \frac{1}{3}\right) = 1.8h(t) \Leftrightarrow t = t_0 \vee t = t_1$, em que $t_0 \approx 1.1382$ e $t_1 \approx 1.5106$, pelo que a diferença entre as altitudes é igual a:

$$h(t_1) - h(t_0) = t_1 \cos(t_1\pi) - \sin\left(\frac{\pi t_1}{3}\right) + 3 - \left(t_0 \cos(t_0\pi) - \sin\left(\frac{\pi t_0}{3}\right) + 3\right) \approx 1.012 = 1012 \text{ metros}$$

10.

10.1. Tem-se que $2y + x = 0 \Leftrightarrow 2y = -x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$.

Assim pretende-se encontrar um intervalo em que a recta tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa pertencente a esse intervalo tenha declive igual a $-\frac{1}{2}$, ou seja, em que $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

A função f' é contínua em \mathbb{R}^+ , por ser a composição, a diferença e o produto entre funções contínuas no seu domínio (logarítmicas e polinomiais), pelo que o teorema de Bolzano-Cauchy é aplicável em qualquer intervalo fechado de números reais contido em \mathbb{R}^+ .

Tem-se que:

$$\bullet f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \times (\ln(\sqrt{e}) - 1) - 2\ln^2(\sqrt{e}) \stackrel{\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}}{=} \sqrt{e} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow f(\sqrt{e}) < -\frac{1}{2}$$

▪ $f(e) = e \times (\ln(e) - 1) - 2\ln^2(e) = e \times (1 - 1) - 2 \times 1^2 = e \times 0 - 2 = -2 \Rightarrow f(e) < -\frac{1}{2}$

Portanto, tendo em conta o teorema de Bolzano-Cauchy, não é possível garantir a existência de uma solução da equação $f'(x) = -\frac{1}{2}$ no intervalo $[\sqrt{e}, e]$.

▪ $f(e^2) = e^2 \times (\ln(e^2) - 1) - 2\ln^2(e^2) = e^2 \times (2 - 1) - 2 \times 2^2 = e^2 - 8 \approx -0,61 \Rightarrow f(e^2) < -\frac{1}{2}$

Portanto, tendo em conta o teorema de Bolzano-Cauchy, não é possível garantir a existência de uma solução da equação $f'(x) = -\frac{1}{2}$ no intervalo $[e, e^2]$.

▪ $f(\sqrt{e^5}) = \sqrt{e^5} \times (\ln(\sqrt{e^5}) - 1) - 2\ln^2(\sqrt{e^5}) \underset{\sqrt{e^5} = e^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \ln(\sqrt{e^5}) = \frac{5}{2}}{=} \sqrt{e^5} \times \left(\frac{5}{2} - 1\right) - 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \approx 5,77 \Rightarrow f(\sqrt{e^5}) > -\frac{1}{2}$

Portanto, como $f(e^2) < -\frac{1}{2} < f(\sqrt{e^5})$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f'(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[e^2, \sqrt{e^5}]$ e, consequentemente, também tem no intervalo $[e^2, \sqrt{e^5}]$.

▪ $f(e^3) = e^3 \times (\ln(e^3) - 1) - 2\ln^2(e^3) = e^3 \times (3 - 1) - 2 \times 3^2 = 2e^3 - 18 \approx 22,17 \Rightarrow f(e^3) > -\frac{1}{2}$

Portanto, tendo em conta o teorema de Bolzano-Cauchy, não é possível garantir a existência de uma solução da equação $f'(x) = -\frac{1}{2}$ no intervalo $[\sqrt{e^5}, e^3]$.

Resposta: C

10.2. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (x(\ln x - 1) - 2\ln^2 x)' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' - 2 \times 2\ln x \times (\ln x)' = \\ &= 1 \times (\ln x - 1) + x \left(\frac{1}{x} - 0 \right)' - 4\ln x \times \frac{1}{x} = \ln x - 1 + \cancel{x}' - \frac{4\ln x}{x} = \ln x - \cancel{x}' + \cancel{x}' - \frac{4\ln x}{x} \\ &= \frac{x \ln x - 4\ln x}{x} = \frac{(x-4)\ln x}{x} \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, o sinal de f'' depende apenas do sinal de $(x-4)\ln x$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)\ln x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x-4=0 \vee \ln x=0) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x=4 \vee x=1) \wedge x \neq 0$

Fazendo um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	0		1		4	$+\infty$
$x-4$	-	-	-	-	0	+
$\ln x$	n.d.	-	0	+	+	+
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	0	+
Gráfico de f	n.d.	\cup	p.i.	\cap	p.i.	\cup

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[1, 4]$, tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[4, +\infty[$, tem pontos de inflexão em $x=1$ e em $x=4$.

11. Tem-se que $\log_a b = \frac{1}{\log_b 3} \Leftrightarrow \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b 3} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b 3} \Leftrightarrow \log_b a = \log_b 3 \Leftrightarrow a = 3$, pelo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > a^{-a\left(\frac{1}{x}+1\right)} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^2}\right)^{x+1} > 3^{-3\left(\frac{1}{x}+1\right)} \Leftrightarrow (3^{-2})^{x+1} > 3^{-\frac{3}{x}-3} \Leftrightarrow 3^{-2x-2} > 3^{-\frac{3}{x}-3} \Leftrightarrow -2x-2 > -\frac{3}{x}-3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{x}-2x+1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{3-2x^2+x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+x+3}{x} > 0 \end{aligned}$$

Tem-se que $-2x^2+x+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2) \times 3}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$ e o zero da função $y=x$ é 0.

Elaborando um quadro de sinal, vem:

x	$-\infty$		-1		0			$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2+x+3$	-		0	+	+	+	+	0	-
x	-		-	-	0	+	+	+	+
$\frac{-2x^2+x+3}{x}$	+ (vermelho)		0	-	n.d.	+ (vermelho)	0	-	

\therefore O conjunto solução da inequação é $]-\infty, -1[\cup \left]0, \frac{3}{2}\right[$.

12.

12.1. A função g é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

Tem-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x+1) - x \ln(x+5) + 1) = 0 \times \ln(0+1) - 0 \times \ln(0+5) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$

- $g(0) = 0 \times \ln(0+1) - 0 \times \ln(0+5) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$

- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sin(3x)}{e^{-2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \left(1 - \frac{\sin(3x)}{x}\right)}{e^{-2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{-2x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\sin(3x)}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{e^{-2x} - 1} \times \left(1 - \underbrace{3 \times \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ 3x \rightarrow 0^-}} \frac{\sin(3x)}{3x}}_{\text{Limite notável}}\right) = -\frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-2x} - 1}}_{\substack{x \rightarrow 0^- \Rightarrow -2x \rightarrow 0^+ \\ \text{Limite notável}}} \times (1 - 3 \times 1) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times (-2) = 1$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 1$, vem que g é contínua em $x = 0$.

12.2. Tem-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de g , pelo que sua ordenada é dada por $g(0) = 1$.

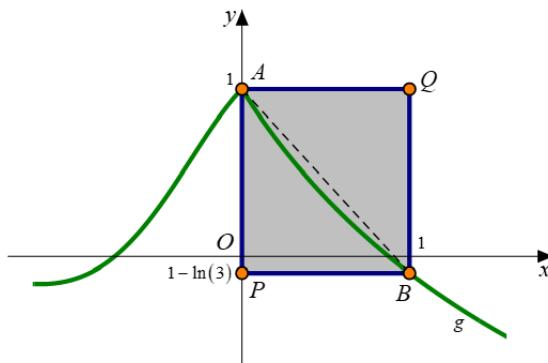
Logo, $A(0,1)$

- o ponto B pertence ao gráfico de g , pelo que a sua ordenada de B é dada por $g(1)$:

$$g(1) = 1 \times \ln(1+1) - 1 \times \ln(1+5) + 1 = \ln(2) - \ln(6) + 1 = \ln\left(\frac{2}{6}\right) + 1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \ln(1) - \ln(3) + 1 = 1 - \ln(3)$$

Logo, $B(1, 1 - \ln(3))$

Consideremos a figura seguinte.



Tem-se que $\overline{AQ} = 1$ e $\overline{BQ} = 1 - (1 - \ln(3)) = 1 - 1 + \ln(3) = \ln(3)$, pelo que o perímetro do rectângulo é dado por:

$$2\overline{AQ} + 2\overline{BQ} = 2 \times 1 + 2\ln(3) = 2 + \ln(3^2) \stackrel{2=\ln(e^2)}{=} 2 + \ln(9) = \ln(e^2) + \ln(9) = \ln(9e^2)$$

Resposta: B

12.3. Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sin(3x)}{e^{-2x} - 1} \stackrel{(3x) \rightarrow \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x} - 1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-2x} - 1} \times \sin(3x) \right) \stackrel{i)}{=} 0 - 0 = 0$$

i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x} - 1} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{y}{2}}{e^y - 1} = -\frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y \left(1 - \frac{1}{e^y} \right)} = -\frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-y}} = \\ &\stackrel{\text{y} = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{y}{2}}{e^y - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y}}_{\text{Limite notável}} \times \frac{1}{1 - e^{-\infty}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{+\infty} \times \frac{1}{1 - 0} = -\frac{1}{2} \times 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2x} - 1} = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ e a função } y = \sin(3x) \text{ é limitada, dado que } -1 \leq \sin(3x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ pelo}$$

que, como o limite de um infinitésimo por uma função limitada é 0, vem que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-2x} - 1} \times \sin(3x) \right) = 0$.

∴ A recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de g , quando $x \rightarrow -\infty$.

Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x+5) + 1) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(\ln(x+1) - \ln(x+5))) = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x+5} \right) \right) \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^x \right) \\ &\stackrel{y=\ln x \text{ é contínua}}{=} 1 + \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{5}{x} \right)^x} \right) = 1 + \ln \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}_{\text{Limite notável}} \over \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x}_{\text{Limite notável}} \right) \\ &= 1 + \ln \left(\frac{e^1}{e^5} \right) = 1 + \ln(e^{1-5}) = 1 + \ln(e^{-4}) = 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

Outra maneira:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x+5} \right) \right) \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln \left(\frac{x+5-4}{x+5} \right) \right) \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln \left(1 - \frac{4}{x+5} \right) \right) \right) \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \dots$$

$$\text{Fazendo } y = \ln \left(1 - \frac{4}{x+5} \right), \text{ vem } e^y = 1 - \frac{4}{x+5} \Leftrightarrow \frac{4}{x+5} = 1 - e^y \Leftrightarrow \frac{x+5}{4} = \frac{1}{1-e^y} \Leftrightarrow x = -5 + \frac{4}{1-e^y}$$

Se $x \rightarrow +\infty$, então $y = \ln \left(1 - \frac{4}{x+5} \right) \rightarrow \ln \left(1 - \frac{4}{+\infty} \right) = \ln(1-0) = \ln(1) = 0$, pelo que o limite fica:

$$\begin{aligned} 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left(-5 + \frac{4}{1-e^y} \right) y \right) &= 1 + \lim_{y \rightarrow 0} (-5y) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y}{1-e^y} = 1 + (-5 \times 0) - 4 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \\ &= 1 + 0 - 4 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite notável}} = 1 - 4 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

∴ A recta de equação $y = -3$ é assimpta horizontal do gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$.

F I M