

Tema | Funções Reais de Variável Real

Conteúdos | Assíntotas ao gráfico de uma função

Ficha de Trabalho

Ex 01.

No referencial da figura está representada uma função f , de domínio \mathbb{R} , e as assíntotas do seu gráfico. As retas r , s e t são, respetivamente, assíntotas vertical, horizontal e oblíqua.

Sabe-se que:

- A reta t passa pelos pontos $(0, -4)$ e $(2, 0)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$
- A função é descontínua em $x = 1$

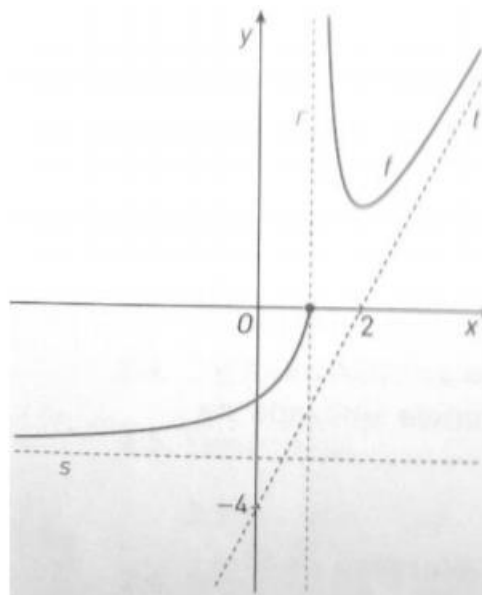
1.1. Escreve uma equação da reta s .

1.2. Determina:

1.2.1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

1.2.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

1.2.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 4))$



Ex 02.

Na figura está representada uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sabe-se que as retas: $y = 2$, $x = 2$ e $y = 0,5x + 1$ são assíntotas do gráfico de f .

Por observação do gráfico, indica os resultados dos seguintes limites:

2.1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

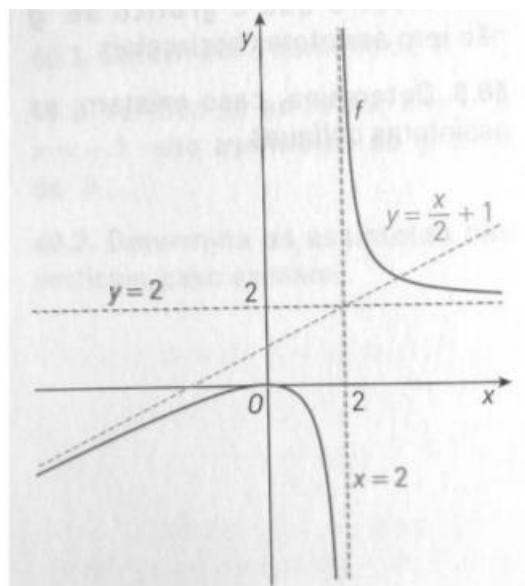
2.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

2.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} - 1 \right)$



Ex 03.

Na figura está parte da representação gráfica de uma função f da qual a reta t é assíntota.

Sabe-se que a reta t pode ser definida pela equação $y = 2x$.

Das seguintes opções, escolhe a que corresponde aos resultados de

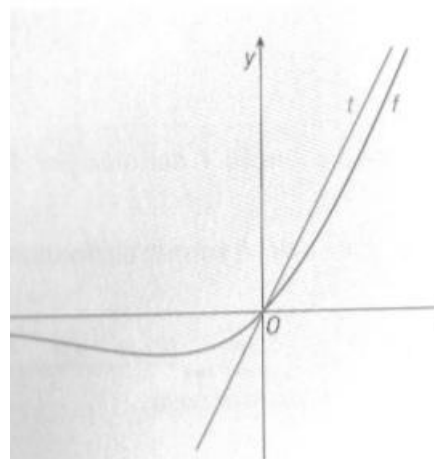
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$, respetivamente.

(A) 2 e $+\infty$

(B) 2 e 0

(C) 0 e 2

(D) $+\infty$ e 2



Ex 04.

De uma função g de domínio \mathbb{R}^- sabe-se que a reta $y = 2$ é assíntota do seu gráfico.

Das seguintes opções, indica a que pode corresponder a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

(A) $-\infty$

(B) 2

(C) -2

(D) 0

Ex 05.

O domínio de uma função f é o conjunto $]1, +\infty[$.

O gráfico de f e as respetivas assíntotas estão representados no referencial da figura.

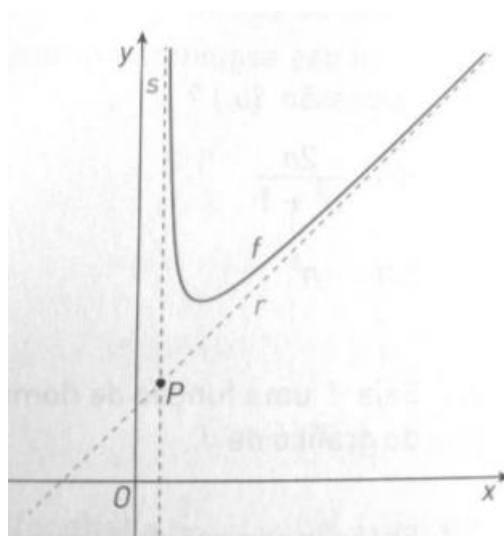
Sabe-se que:

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 3) = 0$

5.1. Determina as coordenadas do ponto P , ponto de interseção das assíntotas do gráfico de f .

5.2. Indica o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 - xf(x)}{x^2} \right)$.



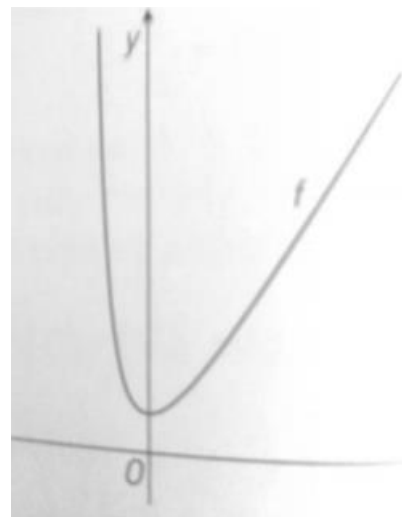
Ex 06.

No referencial da figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-1, +\infty[$.

As retas de equações $x = -1$ e $y = 2x - 1$ são assíntotas do gráfico de f .

Das seguintes afirmações indica a verdadeira.

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
- (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 1) = 0$
- (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$
- (D) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$



Ex 07.

Seja f uma função de domínio \mathbb{R} e g a função definida por $g(x) = f(-x)$. Sabe-se que as únicas assíntotas do gráfico de g são as retas de equações $x = 2$ e $y = 2x$.

Indica qual das seguintes opções corresponde às equações das assíntotas do gráfico da função f .

- (A) $x = 2$ e $y = -2x$
- (B) $x = -2$ e $y = -2x$
- (C) $x = -2$ e $y = 2x$
- (D) $x = 2$ e $y = 2x$

Ex 08.

Considera a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)^2}$.

8.1. Mostre que a reta de equação $y = x - 4$ é assíntota não vertical ao gráfico de f .

8.2. Prova que o gráfico de f admite apenas uma assíntota vertical.

Ex 09.

Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes.

9.1. $f(x) = \frac{2-6x}{x+3}$

9.2. $g(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$

9.3. $h(x) = \sqrt{x+x^2}$

Ex 10.

Seja f uma função par tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$, então pode afirmar-se que:

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 1] = 0$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Ex 11.

Seja f a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 3}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{3-x}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na sua resposta, deve:

- mostrar que existe uma única assíntota vertical e escrever uma equação dessa assíntota;
- mostrar que existe uma única assíntota horizontal em $-\infty$ e escrever uma equação dessa assíntota;
- mostrar que existe uma única assíntota oblíqua em $+\infty$ e escrever uma equação dessa assíntota.

Ex 12.

Considere uma função f , real de variável real, de domínio \mathbb{R} , tal que:

- a reta de equação $y = -x$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$;
- a reta de equação $y = 2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{f(x)} + f(-x) \right]$?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 0

Ex 01.

1.1. $s: y = -3$

1.2.

1.2.1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

1.2.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

1.2.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 4)) = 0$

Ex 02.

2.1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

2.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

2.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

2.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

2.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} - 1 \right) = 0$

Ex 03.

Opção (B)

Ex 04.

Opção (D)

Ex 05.

5.1. $P(1, 4)$

5.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5 - xf(x)}{x^2} \right) = -1.$

Ex 06.

Opção (C)

Ex 07.

Opção (B)

Ex 09.

9.1. $x = -3$ e $y = -6$ são as equações das assíntotas ao gráfico de f .

9.2. $x = 1$, $y = x + 1$ e $y = -x - 1$ são as equações das assíntotas ao gráfico de g .

9.3. $y = x + \frac{1}{2}$ e $y = -x - \frac{1}{2}$ são as equações das assíntotas ao gráfico de h .

Ex 10.

Opção (D)

Ex 11.

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

A reta de equação $y = -1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Ex 12.

Opção (A)