



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____ Data: ____ - ____ - ____

1. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

Sabe-se que o gráfico da função f tem uma assíntota do tipo $y = mx + b$.

Mostra que $m + b = \frac{3}{2}$.

2. Considera a função, de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

2.1. Determina $f'(4)$, pela definição de derivada de uma função num ponto.

2.2. No desenvolvimento de $(f(x) - f(1))^7$ há um termo de grau 2. Determina esse termo.

3. Os Jogos Santa Casa, para comemorarem os 500 anos dos Correios em Portugal, lançaram uma edição da Lotaria Clássica.

A figura representa uma fotografia de uma fração dessa edição da Lotaria.



O número da fração é **4 9 4 7 5**.

Utilizando exatamente os cinco algarismos do número 49 475, quantos números diferentes é possível representar?

(A) 60 (B) 30 (C) 120 (D) 90

4. Considera o Triângulo de Pascal.

4.1. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o 5.º e o 11.º elementos são iguais.

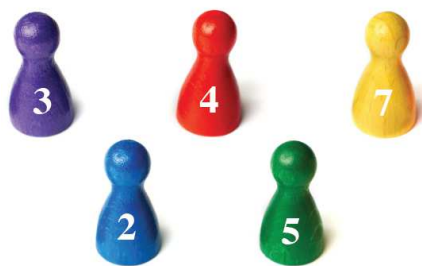
Qual é o valor do 8.º elemento dessa linha?

(A) 3432 (B) 3003 (C) 2002 (D) 3230

4.2. Numa outra linha do Triângulo de Pascal, a soma dos três primeiros elementos com os dois últimos é 172.

Determina a soma de todos os elementos dessa linha?

5. Na figura estão representados cinco peões que fazem parte de um jogo.



Cor do peão	Número do peão
Azul	2
Roxo	3
Vermelho	4
Verde	5
Amarelo	7

- 5.1. Os cinco peões vão ser dispostos, lado a lado, tal como é sugerido na figura.



Quantas disposições diferentes, atendendo às cores dos peões, é possível obter, de modo que o peão azul fique à esquerda do peão vermelho?

Nota: Na figura está exemplificada uma situação em que o peão azul está à esquerda do peão vermelho.

- 5.2. Os cinco peões foram colocados numa caixa e, ao acaso, foram retirados, de uma só vez, três peões.

Determina a probabilidade de a soma dos números do peões retirados ser um número ímpar.

Apresenta o resultado em percentagem.

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B|A) = \frac{1}{2}$ (probabilidade condicionada)
- $P(\bar{B}) = P(A)$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P(B \cap \bar{A})$?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

7. Numa escola, para minimizar a aglomeração de alunos à entrada, foi estabelecido um plano, distribuindo os alunos por duas entradas, E_1 e E_2 .



Num certo dia, entraram na escola 480 alunos (do ensino básico e do ensino secundário), distribuindo-se da seguinte forma:

- pela entrada E_1 : 250 alunos, sendo 170 do ensino básico e os restantes do ensino secundário;
- pela entrada E_2 : restantes alunos.

Escolhe-se, ao acaso, um dos alunos que entraram na escola nesse dia.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : “O aluno escolhido é do ensino básico.”

B : “O aluno escolhido utilizou a entrada E_2 .”

Sabendo que $P(\overline{A} \cap B) = 0,15$, determina o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$.

Apresenta o resultado na forma de número decimal arredondado às centésimas.

FIM

Cotações											Total
Questões	1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.	7.	
Pontos	20	20	25	15	15	25	20	25	15	20	200

1. Equação da assíntota: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Como $m = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, $m + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2.

2.1. $f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: $f'(4) = \frac{1}{4}$

2.2. $(f(x) - f(1))^7 = (\sqrt{x} - 1)^7 = \sum_{k=0}^7 \left({}^7C_k (\sqrt{x})^{7-k} (-1)^k \right)$

$$\left({}^7C_k (\sqrt{x})^{7-k} (-1)^k \right) = (-1)^k {}^7C_k x^{\frac{7-k}{2}}$$

O termo de grau 2 resulta quando $\frac{7-k}{2} = 2$, ou seja, para $k = 3$.

O termo de grau 2 é $(-1)^3 \times {}^7C_3 x^2 = -35x^2$.

Resposta: $-35x^2$

3. ${}^5C_2 = 10$ (número de “posições” para os dois algarismos 4)

$3! = 6$ (permutações dos restantes três algarismos (diferentes) pelas posições não ocupadas pelos algarismos 4)

$${}^5C_2 \times 3! = 60$$

Resposta: (A) 60

4.

4.1. Do 5.º ao 11.º elemento (incluindo estes), existem 7 elementos.

Antes do 5.º elemento, existem 4 elementos.

Logo, depois do 11.º elemento, existem 4 elementos.

No total, a linha tem 15 elementos $(4 + 7 + 4)$, pelo que a linha é:

$${}^{14}C_0 \quad {}^{14}C_1 \quad \dots \quad {}^{14}C_{14}$$

O 8.º elemento é ${}^{14}C_7 = 3432$.

Resposta: (A) 3432

4.2. $({}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2) + ({}^nC_{n-1} + {}^nC_n) = 172$

$$\left(1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!}\right) + (n+1) = 172 \Leftrightarrow 2n + 2 + \frac{(n-1)n}{2} = 172 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 340 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 1360}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 37}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -20$$

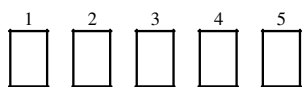
No contexto, $n = 17$.

A soma de todos os elementos dessa linha é dada por 2^{17} , ou seja, 131 072.

Resposta: 131 072

5.

5.1. Admitam-se as “posições” numeradas:



▪ Vermelho na “posição” 1:

1	2	3	4	5
V				

Há **0** maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho

▪ Vermelho na “posição” 2:

1	2	3	4	5
	V			

.

Há $1 \times 3! = 6$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

▪ Vermelho na “posição” 3:

1	2	3	4	5
		V		

Há $2 \times 3! = 12$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

- Vermelho na “posição” 4: $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \square & \square & \square & \boxed{V} & \square \end{array}$

Há $3 \times 3! = 18$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

- Vermelho na “posição” 5: $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \square & \square & \square & \square & \boxed{V} \end{array}$

Há $4 \times 3! = 24$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

No total, há 60 maneiras diferentes ($6 + 12 + 18 + 24$) de o peão azul ficar à esquerda do peão vermelho.

Resposta: 60

5.2. A soma dos números dos três peões é ímpar se:

- os três tiverem número ímpar
- ou
- dois tiverem número par e o outro um número ímpar.

Número de casos favoráveis: ${}^3C_3 + {}^3C_1 \times {}^2C_2 = 1 + 3 \times 1 = 4$

Número de casos possíveis. ${}^5C_3 = 10$.

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{4}{10} = 0,4$$

A probabilidade é 40% .

Resposta: 40%

6.

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = 2P(B \cap A)$$

Como $P(B \cap A) = \frac{1}{6}$, tem-se que $P(A) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(\bar{B}) = P(A) = \frac{1}{3}. \text{ Então, } P(B) = \frac{2}{3}.$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Resposta: (A) $\frac{1}{2}$

7. A partir da informação dada, preenche-se a seguinte tabela:

	Ensino básico A	Ensino secundário \bar{A}	
Entrada E_1 \bar{B}	170	$\#(\bar{A} \cap \bar{B})$	250
Entrada E_2 B	$\#(A \cap B)$	$\#(\bar{A} \cap B)$	230
			480

$$\#(\bar{A} \cap \bar{B}) = 250 - 170 = 80$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{\#(\bar{A} \cap B)}{480} = 0,15$$

Daqui resulta que $\#(\bar{A} \cap B) = 72$.

Assim, $\#(A \cap B) = 230 - 72 = 158$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{158}{480}}{\frac{230}{480}} = \frac{158}{230}$$

$$P(A|B) \approx 0,69$$

Resposta: 0,69