Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

1.1. Quantos desses números são constituídos por dois algarismos pares e três algarismos ímpares:

a) sem repetir algarismos;

b) podendo repetir apenas algarismos pares?

1.2. Relativamente à experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um desses números, considere os acontecimentos:

A : "O número escolhido é ímpar."

B : "O número escolhido tem exatamente dois algarismos 2 e dois algarismos 4."

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{5}{9}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{6}{7}$

2. O segundo elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é igual à décima parte do terceiro elemento dessa mesma linha. Determine o valor de cada um desses elementos.

3. Mostre que se existe termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$, então n é par.

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

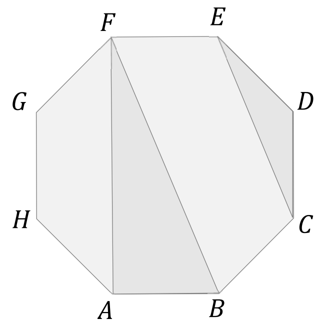
Sabe-se que:

- $P(A) = 0,2$
- $P(B \mid A) = 0,5$
- $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,25$

Determine o valor de $P(A \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na figura está representado o octógono regular $[ABCDEFGH]$.



Escolhidos ao acaso três vértices do octógono, qual é a probabilidade de estes definirem um triângulo em que pelo menos um dos lados também seja lado do octógono?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

6. Um supermercado admitiu dez jovens para um estágio profissional, sendo cinco rapazes e cinco raparigas.

Os dez jovens vão ser distribuídos em três grupos para desempenharem funções em três secções distintas: cinco vão para o armazém, três vão para o atendimento ao público e dois vão para o serviço de pós-venda.

6.1. Admita que apenas os que vão para o atendimento ao público terão tarefas diferenciadas.
De quantas maneiras diferentes podem ser formados os três grupos, tendo também em atenção as tarefas a desempenhar?

(A) 2520 **(B)** 15 120 **(C)** 302 400 **(D)** 181 440

6.2. Admita que a distribuição pelos grupos é feita por sorteio.

Qual é a probabilidade de no serviço de pós-venda ficarem duas raparigas e no atendimento ao público ficar pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

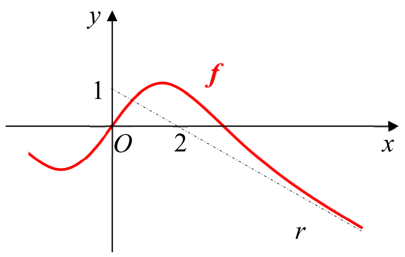
7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-2x}{|x-1|} & \text{se } x<1 \\ k & \text{se } x=1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-x} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

7.1. Mostre que existe um valor de k para o qual a função f é contínua em $x=1$.

7.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota ao seu gráfico, paralela ao eixo Ox, quando $x\to+\infty$.

8. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, ímpar e contínua.



A reta r que passa nos pontos de coordenadas $(0,1)$ e $(2,0)$ é uma assíntota ao gráfico da função f.

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{x}{2}\right)=1$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

(D) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

FIM

Cotações:

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1. a)	**1.1.b).**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	
16	16	16	16	16	20	16	16	16	20	16	16	**200**

Proposta de resolução

1. **1.1.** **a)** $^4C_2 \times {}^5C_3 \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$

Número de maneiras de ordenar os cinco algarismos
Número de maneiras de escolher os três algarismos ímpares
Número de maneiras de escolher os dois algarismos pares

b) $^5C_2 \times {}^4A'_2 \times {}^5A_3 = 10 \times 4^2 \times 60 = 9600$

Número de maneiras de escolher ordenadamente os três algarismos ímpares
Número de maneiras de escolher ordenadamente os dois algarismos pares
Número de maneiras de escolher os dois lugares dos algarismos pares

1.2. $P(A \mid B)$ designa a probabilidade de o número escolhido ser ímpar sabendo que tem exatamente dois algarismos 2 e dois algarismos 4.

Assim, os casos possíveis são os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que têm exatamente dois algarismos 2 e dois algarismos 4 (2 □ 4 2 4, por exemplo).

O número de casos possíveis é:

$^5C_2 \times {}^3C_2 \times 7 = 10 \times 3 \times 7 = 210$

Número de maneiras de escolher o algarismo diferente de 2 e de 4
Número de maneiras de escolher dois lugares, entre os três restantes, para os algarismos 4
Número de maneiras de escolher dois lugares para os algarismos 2

Por outro lado, os casos favoráveis são os números ímpares de cinco algarismos que têm dois algarismos 2 e dois algarismos 4 (2 4 2 4 □)

O número de casos favoráveis é:

$^4C_2 \times {}^2C_2 \times 5 = 6 \times 1 \times 5 = 30$

Número de maneiras de escolher o algarismo ímpar para algarismo das unidades (1,3,5,7 ou 9)
Número de maneiras de escolher dois lugares, entre os dois restantes, para os algarismos 4
Número de maneiras de escolher dois lugares para os algarismos 2

$P(A \mid B) = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$

Resposta: **(B)**

2. O segundo e o terceiro elementos da linha de ordem n são $^nC_1$ e $^nC_2$, respetivamente.

$$^nC_1 = \frac{^nC_2}{10} \Leftrightarrow 10\,^nC_1 = {}^nC_2 \Leftrightarrow 10n = \frac{^nA_2}{2!} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10n = \frac{n(n-1)}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow 20n = n^2 - n \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 21n = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow n(n-21) = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n = 0 \vee n = 21) \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 21$$

Os elementos pedidos são $^{21}C_1 = 21$ e $^{21}C_2 = 210$

3. $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p x^{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p x^{n-p}\left(x^{-1}\right)^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p x^{n-p} x^{-p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p x^{n-2p}$$

O termo independente de x, caso exista, é o termo que se obtém para $n-2p=0$, com $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $0 \le p \le n$.

Ora, $n-2p=0 \Leftrightarrow p=\frac{n}{2}$. Portanto, p apenas existe se n for par.

4. $P(A)=0,2$

$P(B\,|\,A)=0,5$

$P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=0,25$

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Precisamos de determinar $P(A\cap B)$ e $P(B)$.

$$P(B\,|\,A)=0,5 \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0,5 \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{0,2}=0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2\times 0,5 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,1$$

$$P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=0,25 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=0,25 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B\cup A})}{1-P(A)}=0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-P(A\cup B)}{0,8}=0,25 \Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0,8\times 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-0,2 \Leftrightarrow P(A\cup B)=0,8$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

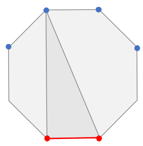
$$0,8=0,2+P(B)-0,1 \Leftrightarrow P(B)=0,8-0,1 \Leftrightarrow P(B)=0,7$$

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,1}{0,7}=\frac{1}{7}$$

5. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_3 = 56$

Número de casos favoráveis: $32 + 8 = 40$

Número de triângulos em que um, e um só, dos lados do octógono também é lado do triângulo:

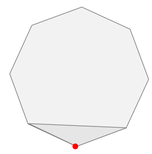


$8 \times 4 = 32$

→ Número de maneiras de escolher o terceiro vértice (ficam excluídos 4 vértices do octógono)

→ Número de maneiras de escolher o lado comum

Número de triângulos em que dois dos lados do octógono também são lados do triângulo: 8 (há 8 maneiras de escolher dois lados consecutivos do octógono)



$$P = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$$

Resposta: **(D)**

6.

6.1. ${}^{10}C_5 \times {}^{5}A_3 = 15\,120$

→ Número de maneiras de, dos restantes cinco elementos, escolher ordenadamente três para o atendimento ao público

→ Número de maneiras de escolher cinco elementos para o armazém

Resposta: **(B)**

6.2. Não é feita qualquer exigência quanto à diferenciação de tarefas no atendimento ao público.

Número de casos possíveis:

$${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 = 2520$$

Número de casos favoráveis:

Há dois casos a considerar:

Pós-Venda	Atendimento	Armazém
2 M	2 M e 1 H	1 M e 4 H
2 M	1 M e 2 H	2 M e 3H

$${}^{5}C_2 \times {}^{3}C_2 \times {}^{5}C_1 + {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_1 \times {}^{5}C_2 =$$

$$= 10 \times 3 \times 5 + 10 \times 3 \times 10 = 150 + 300 = 450$$

$$P = \frac{450}{2520} = \frac{5}{28}$$

7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-2x}{|x-1|} & \text{se } x<1\\ k & \text{se } x=1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-x} & \text{se } x>1\end{cases}$

7.1. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2-2x}{|x-1|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x(x-1)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}(-2x)=-2$

| Se $x<1, |x-1|=-(x-1)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{(\sqrt{x})^2-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{x-x^2}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{-x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}+x}{-x}=\dfrac{1+1}{-1}=-2$

$f(1)=k$

Se $k=-2$, a função f é contínua em $x=1$.

7.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}-1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}=\dfrac{1+0}{0-1}=-1$

A reta de equação $y=-1$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

8. A reta $r:\ y=mx+b$ passa nos pontos de coordenadas $(0,1)$ e $(2,0)$.

$m=\dfrac{0-1}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$

$b=1$

Dado que a reta r é uma assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$, temos:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{1}{2}x\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=-\infty$

Dado que f é uma função ímpar e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ então $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Logo, **(D)** é falsa.

Resposta: **(D)**