

Proposta de resolução

1. 1.1. $\alpha: x - 2y - 2z + 6 = 0$

$$A(0, a, 0) \in \alpha \Leftrightarrow 0 - 2a - 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$$

Temos, portanto, $A(0, 3, 0)$.

1.2. Seja C o centro da base do cone.

C é o ponto médio de $[AB]$, com $A(0, 3, 0)$ e $B(-4, -1, 2)$.

$$C\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = C(-2, 1, 1)$$

A reta que passa no ponto V e é perpendicular ao plano da base do cone é a reta r que tem a direção do vetor $(1, -2, -2)$ e que passa no ponto $C(-2, 1, 1)$.

$$r: (x, y, z) = (-2, 1, 1) + k(1, -2, -2), k \in \mathbb{R}$$

O ponto V é o ponto da reta r , de cota positiva, tal que $\overline{VC} = 6$

Ponto genérico da reta r : $R(-2+k, 1-2k, 1-2k), k \in \mathbb{R}$

$$\overline{CR} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(-2+k+2)^2 + (1-2k-1)^2 + (1-2k-1)^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4k^2 + 4k^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|k| = 6 \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2$$

$$\text{Se } k = 2, R(-2+2, 1-4, 1-4) = R(0, -3, -3)$$

$$\text{Se } k = -2, R(-2-2, 1+4, 1+4) = R(-4, 5, 5)$$

Portanto, como V tem cota positiva, $V(-4, 5, 5)$.

1.3. $A(0, 3, 0), C(-2, 1, 1), P(-4, 2, -1)$

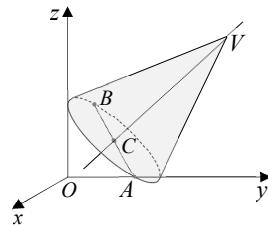
$$\text{Raio da base} = r = \overline{AC} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

O ponto P pertence à base do cone se e só se $P \in \alpha$ e $\overline{PC} \leq 3$.

$$P \in \alpha \Leftrightarrow -4 - 2 \times 2 - 2 \times (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow -4 - 4 + 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{Verdadeiro})$$

$$\overline{PC} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(-4+2)^2 + (2-1)^2 + (-1-1)^2} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{4+1+4} \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 3 \quad (\text{Verdadeiro})$$

Portanto, o ponto P pertence à base do cone.



2. $M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{B}{B_0} \right)$

2.1. $M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{B}{B_0} \right) \Leftrightarrow \frac{M}{-2,5} = \log_{10} \left(\frac{B}{B_0} \right) \Leftrightarrow -0,4M = \log_{10} \left(\frac{B}{B_0} \right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{B}{B_0} = 10^{-0,4M} \Leftrightarrow B = 10^{-0,4M} \times B_0$

2.2. $M_{\text{Sol}} = -26,74$

$M_{\text{Lua}} = -12,74$

$B_{\text{Sol}} = 10^{-0,4M_{\text{Sol}}} \times B_0 = 10^{-0,4 \times (-26,74)} \times B_0 = 10^{10,696} \times B_0$

$B_{\text{Lua}} = 10^{-0,4M_{\text{Lua}}} \times B_0 = 10^{-0,4 \times (-12,74)} \times B_0 = 10^{5,096} \times B_0$

$\frac{B_{\text{Sol}}}{B_{\text{Lua}}} = \frac{10^{10,696} \times B_0}{10^{5,096} \times B_0} = 10^{10,696 - 5,096} = 10^{5,6} \approx 398\,107$

$B_{\text{Sol}} \approx 398\,107 \times B_{\text{Lua}}$

Portanto, a intensidade do brilho do Sol, medida a partir da Terra, é cerca de 400 mil vezes (398 107) maior do que a da Lua, em fase de lua cheia.

3. $\log_a b = \frac{1}{4}$

$\log_b c = 2$

$\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c = \frac{\log_a a}{\log_a b} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 2 = 4 + 2 = 6$

Resposta: (D)

4. As medidas dos segmentos de reta estão em progressão geométrica, (a_n) , de razão $r = \frac{3}{4}$,

sendo $a_1 = 4$.

$$\lim S_n = \lim \left(a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right) = \lim \left(4 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \right) = 4 \times \frac{1 - \lim \left(\frac{3}{4} \right)^n}{\frac{1}{4}} = 4 \times 4 \times (1 - 0) = 16$$

Resposta: (B)

5. $4! \times {}^5A_3 = 1440$

Número de maneiras de escolher ordenadamente lugar para as 3 raparigas entre os 5 lugares

determinados pelos 4 rapazes: Rapaz Rapaz Rapaz Rapaz Rapaz

Número de maneiras de ordenar os 4 rapazes

Resposta: (D)

6. 6.1. Sejam os acontecimentos:

I : “A pessoa escolhida está infetada”

A : “O teste deu positivo”

É dado que:

$$P(I) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P(\bar{A}|I) = 0,01$$

$$P(A|\bar{I}) = 0,04$$

$$\text{Probabilidade pedida: } P(\bar{I}|A)$$

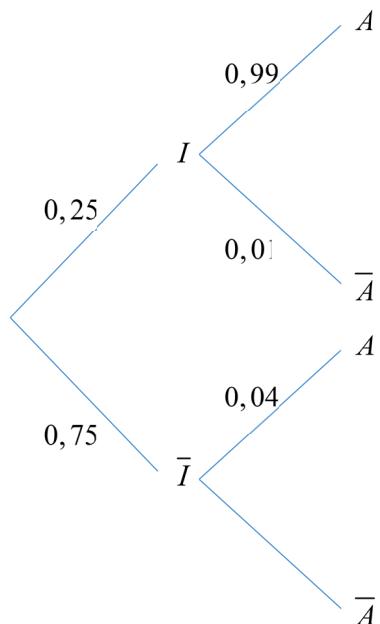
No diagrama ao lado, registaram-se os valores dados, bem como aqueles que foram sendo sucessivamente determinados:

$$P(\bar{I}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(A|I) = 1 - 0,01 = 0,99$$

$$P(\bar{I}|A) = \frac{P(\bar{I} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bar{I}) \times P(A|\bar{I})}{P(\bar{I} \cap A) + P(I \cap A)} =$$

$$= \frac{0,75 \times 0,04}{0,75 \times 0,04 + 0,25 \times 0,99} = \frac{0,03}{0,2775} \approx 0,1081 \approx 10,8\%$$



6.2. Número de indivíduos: 28

Número de infetados: 7

Número de não infetados: 21

Número de casos possíveis: ${}^{28}C_4 = 20\,475$

Número de casos favoráveis: ${}^{28}C_4 - {}^{21}C_4 = 20\,475 - 5985 = 14\,490$

Nº de comissões sem infetados que é possível formar
Nº total de comissões que é possível formar

Probabilidade pedida: $P = \frac{14\,490}{20\,475} = \frac{46}{65} \approx 0,708$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \sin(3x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ x - 1 + x e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

7.1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x}{x} - \frac{\sin(3x)}{x} \right) = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{x} =$

$$= 2 - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{3x} = 2 - 3 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 2 - 3 \times 1 = -1$$

$y = 3x$

$\left| \begin{array}{l} y = 3x \\ \text{Se } x \rightarrow 0^-, y \rightarrow 0^+ \end{array} \right.$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1 + x e^{-x}) = 0 - 1 + 0 \times e^0 = -1 = f(0)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Logo, a função f é contínua em $x = 0$.

7.2. Seja $y = mx + b$ a assíntota do gráfico da função f quando x tende para $+\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + x e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + e^{-x} \right) = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + x e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + x e^{-x}) = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})^{(\infty \times 0)} =$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) = -1 + \left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} \right) = -1 + \frac{1}{+\infty} = -1 + 0 = -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f quando x tende para $+\infty$.

8. $f(x) = ax + x \ln x$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow ax + x \ln x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(a + \ln x) = 0 \Leftrightarrow a + \ln x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x = -a \Leftrightarrow x = e^{-a} \end{aligned}$$

O único zero da função f é $x_0 = e^{-a}$.

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax + x \ln x)' = (ax)' + (x \ln x)' = \\ &= a + x' \ln x + x(\ln x)' = a + \ln x + x \times \frac{1}{x} = \\ &= a + \ln x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = f'(e^{-a}) = a + \ln e^{-a} + 1 = a - a + 1 = 1$$

Portanto, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a 1, logo não depende do valor de a .

9. $f(x) = \cos x$; $g(x) = \cos(x - a) + k$

$$f'(x) = -\sin x \text{ e } g'(x) = -\sin(x - a)$$

Se os gráficos das funções f e g têm uma reta tangente comum no ponto de abcissa x_0 , então:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow -\sin x_0 = -\sin(x_0 - a) \Leftrightarrow \sin x_0 = \sin(x_0 - a)$$

Resposta: (C)

10. $f(x) = \frac{1-e^x}{e^{2x}}$

$$\begin{aligned} 10.1. \quad f'(x) &= \left(\frac{1-e^x}{e^{2x}} \right)' = \frac{(1-e^x)' e^{2x} - (1-e^x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{-e^x \times e^{2x} - (1-e^x) \times 2(e^{2x})}{(e^{2x})^2} = \\ &= \frac{e^{2x}(-e^x - 2 + 2e^x)}{(e^{2x})^2} = \frac{e^x - 2}{e^{2x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 2}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \wedge e^{2x} \neq 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow	$-\frac{1}{4}$	\nearrow

Mín.

$$f(\ln 2) = \frac{1-e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2}} = \frac{1-2}{e^{\ln 2^2}} = \frac{-1}{e^{\ln 4}} = -\frac{1}{4}$$

Podemos, assim, concluir que:

- f é estritamente decrescente em $]-\infty, \ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2, +\infty[$;
- f tem um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ para $x = \ln 2$.

10.2. A taxa média de variação de f entre a e $a+2$ é dada por $\frac{f(a+2)-f(a)}{2}$.

O valor de a pedido é a solução da equação $\frac{f(x+2)-f(x)}{2} = -1$.

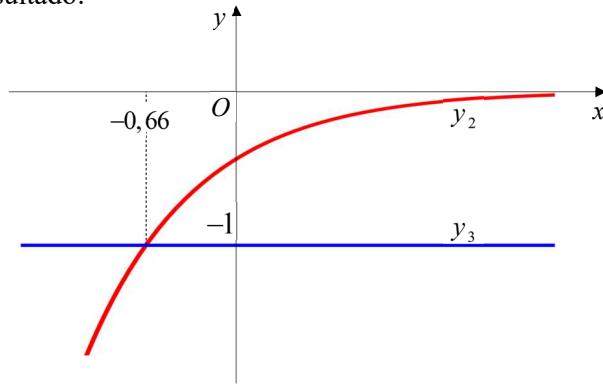
Recorrendo à calculadora gráfica, definiram-se:

$$y_1 = f(x) = \frac{1-e^x}{e^{2x}},$$

$$y_2 = \frac{y_1(x+2) - y_1(x)}{2} \text{ e } y_3 = -1$$

De seguida, determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de y_2 e y_3 .

Obteve-se o seguinte resultado:



Portanto, $a \approx -0,66$.

11. Seja $z = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z^2 = i \bar{z} &\Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = i \overline{\rho e^{i\theta}} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \wedge 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Temos, portanto $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$

Resposta: (B)

12. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de z_1

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2} \\ (2, -2\sqrt{3}) \in 4.^o Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \theta = -\sqrt{3} \\ (2, -2\sqrt{3}) \in 4.^o Q \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_1$$

$$z_1 = 4 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$(i \times z_1)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \times 4 e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^n = \left(4 e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} \right)^n = \left(4 e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n = 4^n e^{i \times n \times \frac{\pi}{6}} = 4^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$$

$$(i \times z_1)^n \text{ é um número real negativo se e só se } \frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = 6\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o menor número natural para o qual $(i \times z_1)^n$ é um número real negativo é

$$n = 6 + 12 \times 0 = 6.$$