

## Proposta de resolução

**1.**

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overline{BA} \times \overline{DC} \times \cos(90^\circ + 60^\circ) = a \times a \times (-\sin(60^\circ)) = a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Opção (D)

**2.**

$$\frac{\log_2 x}{5 + \log_8 x^3} + (\log_4 x)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{5 + \frac{\log_2 x^3}{\log_2 8}} + \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{5 + \frac{3 \log_2 x}{3}} + \frac{1}{4} (\log_2 x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x \left( \frac{1}{5 + \log_2 x} + \frac{\log_2 x}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \vee \frac{4 + 5 \log_2 x + (\log_2 x)^2}{4(5 + \log_2 x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee \log_2 x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \wedge 5 + \log_2 x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee \log_2 x = -4 \vee \log_2 x = -1 \wedge x \neq 2^{-5} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{16} \vee x = \frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{1}{32}$$

$$\text{C.S} = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

**3.**

**3.1.**

$$r : 2y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$AB \perp r \Rightarrow m_{AB} \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_{AB} \times \left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow m_{AB} = -2$$

$$A(1, 3) \in AB \Rightarrow 3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 5$$

$$\therefore AB : y = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x + y = 5$$

**3.2.**

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 10 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\therefore B\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$r = \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{11}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}}$$

$\therefore$  Uma equação que define a circunferência é, por exemplo:  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{36}{5}$

4. Seja  $z = x + yi$

$$z + \bar{z} \geq 0 \Leftrightarrow x + yi + x - yi \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0$$

$\therefore$  Semiplano vertical fechado, à direita do eixo dos imaginários.

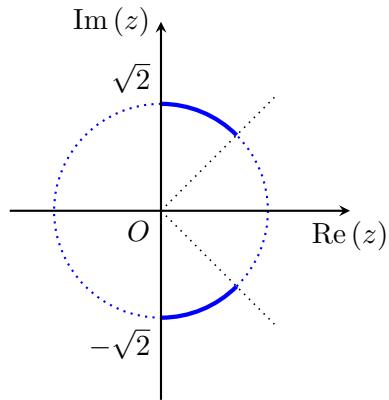
$$z \cdot \bar{z} = 2 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$$

$\therefore$  Circunferência centrada na origem e de raio  $\sqrt{2}$ .

$$|\operatorname{Arg}(z)| \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{4} \vee \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$  Região exterior à região limitada por duas semirretas com origem na origem do referencial e que formam ângulos, respectivamente, de  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  com o eixo real.

$$z + \bar{z} \geq 0 \wedge z \cdot \bar{z} = 2 \wedge |\operatorname{Arg}(z)| \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge |z| = \sqrt{2} \wedge \left( \operatorname{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{4} \vee \operatorname{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4} \right)$$



Opção (C)

5.

$$53 = 13 \times 4 + 1 \Rightarrow i^{53} = i$$

$$w = z_1^3 \left( \frac{\bar{z}_2^2}{i^{53}} + e^{i \frac{3\pi}{2}} \right) = \left( e^{i \frac{\pi}{12}} \right)^3 \left[ \frac{(2+i)^2}{i} - i \right] = e^{i \frac{3\pi}{4}} \left( \frac{3+4i}{i} - i \right) = e^{i \frac{3\pi}{4}} (4 - 3i - i) = e^{i \frac{3\pi}{4}} (4 - 4i)$$

$$|4 - 4i| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(4 - 4i) = -\arctan\left(\frac{4}{4}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 4 - 4i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

Assim,

$$w = e^{i \frac{\pi}{4}} \times 4\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 4\sqrt{2}e^{i(0)} = 4\sqrt{2}$$

6.

$$S_{n+1} = 2 \times S_n$$

Assim,

$$\log_2 S_n - \log_2 S_{n+1} = \log_2 \left( \frac{S_n}{S_{n+1}} \right) = \log_2 \left( \frac{S_n}{2 \times S_n} \right) = \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) = -1$$

Opção (B)

7.

7.1.

$$(3, 4, -3) \parallel AV \Rightarrow (3, 4, -3) \perp \alpha$$

$$A \in xOz \Rightarrow A(x, 0, z)$$

$$(x, 0, z) = (-2, -4, 6) + k(3, 4, -3), \quad k \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ 0 = -4 + 4k \\ z = 6 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\therefore A(1, 0, 3)$$

$$3 \times 1 + 4 \times 0 - 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

$$\therefore \alpha : 3x + 4y - 3z + 6 = 0$$

7.2.

$$B(x, 0, 1) \wedge B \in \alpha \Rightarrow 3x + 4 \times 0 - 3 \times 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\therefore B(-1, 0, 1)$$

$$V \in xOy \Rightarrow V(x, y, 0)$$

$$(x, y, 0) = (-2, -4, 6) + k(3, 4, -3), \quad k \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -4 + 4k \\ 0 = 6 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\therefore V(4, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (1, 0, 3) - (4, 4, 0) = (-3, -4, 3)$$

$$\overrightarrow{VB} = B - V = (-1, 0, 1) - (4, 4, 0) = (-5, -4, 1)$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{VB}}{\|\overrightarrow{VA}\| \cdot \|\overrightarrow{VB}\|} = \frac{15 + 16 + 3}{\sqrt{9+16+9} \times \sqrt{25+16+1}} = \frac{\sqrt{357}}{21}$$

$$\sin(\theta - 5\pi) \times \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \tan^2(3\pi - \theta) = -\sin \theta \times \sin \theta + (-\tan \theta)^2 = -\sin^2 \theta + \tan^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{357}}{21}\right)^2 = \frac{4}{21}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\frac{4}{21}}{\left(\frac{\sqrt{357}}{21}\right)^2} = \frac{4}{17}$$

Assim, o valor pedido é:

$$-\frac{4}{21} + \frac{4}{17} = \frac{16}{357}$$

**8.**  $2 \times 5 \times {}^8A_4 - {}^5A_2 \times {}^7A_3$

Opção (A)

- 5 representa o número de escolhas para o algarismo ímpar para a primeira ou última posição
- 2 representa o número de posições onde colocar esse número ímpar (primeira ou última)
- ${}^8A_4$  representa o número de formas de distribuir 4 dos 8 restantes algarismos pelas restantes posições
- ${}^5A_2 \times {}^7A_3$  representa o número de formas de colocar um algarismo ímpar na primeira e na última posições e distribuir 3 dos restantes 7 algarismos nas três posições do meio. Este valor tem de ser subtraído pois está a ser contabilizado em duplicado na primeira parcela.

**9.**

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A) = 0,3$$

$$P(\overline{A} \cup B) = 0.8 \Leftrightarrow P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0.8 \Leftrightarrow 0.7 + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 0.8$$

$$\Leftrightarrow P(A) \times P(B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.3 \times P(B) = 0.1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Opção (C)

**10.**

$$m_r = \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$r : y = \frac{1}{2}x + 1$$

Seja  $(a_n)$  a sucessão das áreas dos triângulos:

$$a_1 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{5}{8}$$

$$a_2 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1\right)}{2} = \frac{7}{8}$$

$$a_3 = \frac{1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + 1\right)}{2} = \frac{9}{8}$$

...

Repare-se que  $a_{n+1} - a_n$  é constante e igual a  $a_2 - a_1 = \frac{1}{4}$ .

$\therefore (a_n)$  é uma p.a. de razão  $\frac{1}{4}$ .

Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{8} + (n-1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{3}{8}$$

$$S_n = 127.5 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = 127.5 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{8} + \frac{1}{4}n + \frac{3}{8}}{2} \times n = 127.5 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 1020 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4080}}{2} \Leftrightarrow n = 30 \vee n = -34 \Rightarrow n = 30$$

Como já existiam 6 triângulos, o João desenhou  $30 - 6 = 24$  triângulos.

11.

11.1.

$$P = \frac{3 \times 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{12 \times 6} = \frac{11}{24}$$

- Se no dado dodecaédrico sair face 10 ou superior, então a soma será sempre superior a 10. Assim  $3 \times 6$  representa o número de situações em que sai face 10, 11, ou 12 no dado dodecaédrico e qualquer uma das faces no dado cúbico
- Se sair face 9 no dado dodecaédrico então existem 5 situações que a soma é superior a 10 (sair 2, 3, 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 8 no dado dodecaédrico então existem 4 situações que a soma é superior a 10 (sair 3, 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 7 no dado dodecaédrico então existem 3 situações que a soma é superior a 10 (sair 4, 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 6 no dado dodecaédrico então existem 2 situações que a soma é superior a 10 (sair 5 ou 6 no dado cúbico)
- Se sair face 5 no dado dodecaédrico então existe apenas uma situação que a soma é superior a 10 (sair 6 no dado cúbico)
- Em todas as outras situações a soma dos valores obtidos é inferior ou igual a 10

11.2.  $P(B|A)$  é a probabilidade do produto dos números obtidos ser par, sabendo que ambos estão desenhados com a mesma cor.

Se estão desenhados com a mesma cor, estão são ambos vermelhos ou são ambos azuis.

Se são ambos vermelhos, significa que saiu número ímpar no dado dodecaédrico e saiu número par no dado cúbico. Portanto, neste caso o produto será par, já que um dos dois números é par.

Se são ambos vermelhos, significa que saiu número par no dado dodecaédrico e saiu número ímpar no dado cúbico. De igual modo, neste caso o produto também será par.

Assim, em todas as situações em que os números obtidos estão desenhados com a mesma cor, o produto entre eles é par, portanto  $P(B|A) = 1$ .

12.

$$\tan x = \frac{\overline{BP}}{a} \Leftrightarrow \overline{BP} = a \tan x$$

$$A_{[APC]} = A_{[ABC]} - A_{[ABP]} = \frac{2a \times a}{2} - \frac{a \tan x \times a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} \tan x = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \tan x\right)$$

Opção (D)

13.

13.1.

$$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3xe^x + 1}{e^x} - \frac{3e + 1}{e}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + e^{-x} - 3 - e^{-1}}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-1}(e^{-x+1} - 1)}{x - 1} = 3 - e^{-1} \underbrace{\lim_{-x+1 \rightarrow 0} \frac{e^{-x+1} - 1}{-x+1}}_{\text{limite notável}} = 3 - \frac{1}{e} = \frac{3e - 1}{e}$$

**13.2.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3xe^x + 1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{xe^x} \right) = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3xe^x + 1}{e^x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x + \frac{1}{e^x} - 3x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação  $y = 3x$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - x}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \\ - \frac{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1}{0 - 1} = 2$$

A reta de equação  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

- 14.** (A) é falsa,  $h$  tem dois pontos de inflexão, de abcissas iguais aos dois extremantes (minimizante e maximizante) de  $h'$ . Repare-se que a monotonia de  $h'$  “inverte” duas vezes.  
 (B) é falsa,  $h$  tem apenas um mínimo relativo, imagem por  $h$  do “segundo” zero de  $h'$  (o sinal de  $h'$  “vem” de negativo para positivo).  
 (C) é verdadeira,  $h$  tem dois máximos relativos, imagens por  $h$  dos “primeiro” e “terceiro” zeros de  $h'$ .  
 (D) é falsa. Como  $h'$  “começa” por decrescer, até atingir o mínimo relativo, depois cresce, até atingir o máximo relativo e “torna” a decrescer em seguida, então o sinal de  $h''$  “começa” por ser negativo, depois positivo e, de seguida, novamente negativo. Assim, como o sinal de  $h''$  muda duas vezes,  $h''$  não é monótona.

Opção (C)

**15.**

$$\lim (a_n) = \lim \left( n^2 e^{-n} + \frac{\ln(n)}{n} \right) = \lim \underbrace{\frac{n^2}{e^n}}_{\text{limite notável}} + \underbrace{\lim \frac{\ln(n)}{n}}_{\text{limite notável}} = \frac{1}{\lim \underbrace{\frac{e^n}{n^2}}_{\text{limite notável}}} + 0 = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0$$

Opção (B)