

Proposta de resolução

1.

1.1. Sejam os acontecimentos:

- M : “o cliente utilizou máscara”
- L : “o cliente utilizou luvas”

$$P(L|M) = \frac{3}{5}, P(\bar{M}) = 0.2 \text{ e } P(\bar{L}|\bar{M}) = \frac{1}{2}$$

Pretende-se calcular $P(M|L)$

$$\begin{aligned} P(M|L) &= \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L|M) \times P(M)}{P(L|M) \times P(M) + P(\bar{L}|\bar{M}) \times P(\bar{M})} = \\ &= \frac{0.6 \times 0.8}{0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2} \approx 83\% \end{aligned}$$

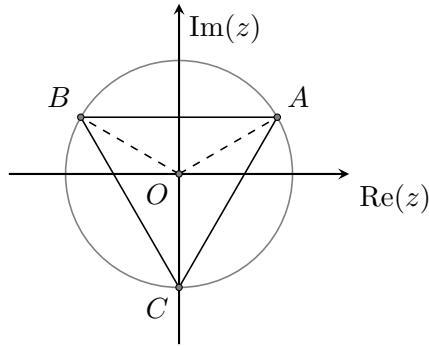
1.2. $30 \times 0.7 = 21$ clientes do sexo feminino $\Rightarrow 9$ clientes do sexo masculino

$$P = \frac{\binom{21}{5} + \binom{9}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{25}{174}$$

2.

$$\bar{z}(z^3 - i) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 0 \vee z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$z = 0 \vee z = e^{i\frac{\pi}{6}} \vee z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \vee z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \vee z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \vee z = -i$$



$$P_{[ABC]} = 3 \times \overline{AB} = 3 \times \left| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| = 3 \times |\sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$$

Opção (B)

3. Uma expressão que define a sucessão (u_n) é $u_n = 4n - 3$

Assim, $v_n = 2^{4n-3}$

(v_n) é uma progressão geométrica se $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ for constante

$$r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{4(n+1)-3}}{2^{4n-3}} = \frac{2^{4n+1}}{2^{4n-3}} = 2^4 = 16$$

∴ (v_n) é uma progressão geométrica de razão 16

A soma dos seus 100 primeiros termos é dada por:

$$S_{100} = v_1 \times \frac{1 - r^{100}}{1 - r} = 2 \times \frac{1 - 16^{100}}{1 - 16} = \frac{2}{15} (16^{100} - 1)$$

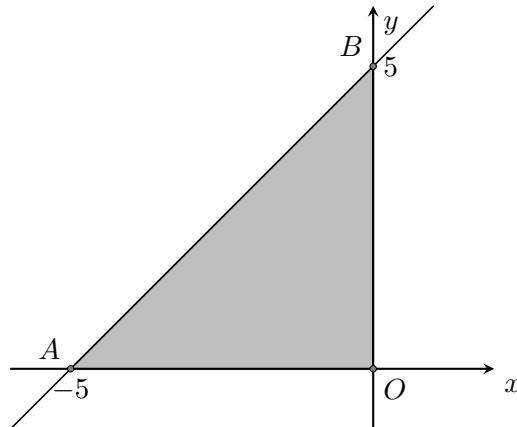
4.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-3} + \frac{1}{e^x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-3} + \frac{1}{e^x} = x + 5 + \frac{16}{x-3} + \frac{1}{e^x}$$

Cálculos auxiliares:

| | | | | |
|---|---|----|----|--|
| | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 3 | 15 | | |
| | 1 | 5 | 16 | |

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{x-3} + \frac{1}{e^x} \right) = 0$, então a reta de equação $y = x + 5$ é assintota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$



$$A_{[OAB]} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

Opção (D)

5. $D = \mathbb{R}^+$

$$\log_2(x+1) + \log_{\sqrt{2}}(x) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2 \log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2[(x+1)x^2] \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 \geq 0$$

Cálculos auxiliares:

Como o polinómio $x^3 + x^2 - 2$ tem coeficientes inteiros então qualquer raiz inteira deste polinómio é um divisor do seu termo independente -2

Os divisores de -2 são : 1, 2, -1 e -2

Testando para $x = 1$ obtém-se $1^3 + 1^2 - 2 = 0$, ou seja, 1 é raiz do polinómio

Aplicando a Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$(x-1)(x^2 + 2x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)[(x+1)^2 + 1] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$C.S = [1, +\infty[$$

6. Pretende-se identificar qual dos intervalos, o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um valor x que é solução da equação:

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$$

Seja h a função de domínio \mathbb{R}^+ definida por $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$

h é contínua pois resulta da diferença de funções contínuas, uma função exponencial e uma função racional

Apenas resta verificar qual o intervalo em que ocorre mudança de sinal na função h

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = e^{0^+} - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty < 0 \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$h(1) = e - 1 > 0 \quad h\left(\frac{3}{2}\right) = e\sqrt{3} - \frac{2}{3} > 0$$

Como $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$ então a opção correta é a opção (B)

7. $2 \times 10 \times 3! \times 9! = 2 \times 10! \times 3!$

Opção (A)

- 2 representa o número de posições possíveis para o ás de espadas (posição inicial ou posição final)
- 10 representa o número de formas de colocar as três figuras seguidas nas restantes 12 posições
- 3! representa o número de permutações entre as três figuras
- 9! representa o número de permutações entre as restantes 9 cartas (do 2 ao 10 de espadas)

8.

$${}^6C_p x^{6-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^6C_p x^{6-2p} \quad 6-2p=0 \Leftrightarrow p=3$$

Opção (C)

9.

9.1.

$$A(x, 0, 0) \Rightarrow A(3, 0, 0) \quad B(0, y, 0) \Rightarrow B(0, 3, 0) \quad C(0, 0, z) \Rightarrow C(0, 0, 5)$$

$$\overrightarrow{DA} = (3, 0, -5) \quad \overrightarrow{DC} = (0, 3, -5)$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{\|\overrightarrow{DA}\| \times \|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{25}{\sqrt{9+25^2}} = \frac{25}{34}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(\frac{25}{34}\right)^2 - 1 = \frac{47}{578}$$

9.2.

$$r : (y-2)^2 + (2z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow y-2=0 \wedge 2z-5=0 \Leftrightarrow y=2 \wedge z=\frac{5}{2}$$

$$5x - 5 \times 2 + 3 \times \frac{5}{2} = 15 \Leftrightarrow 5x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

Se a reta é perpendicular ao plano α então $\vec{n} = (5, 5, 3)$ é um vetor diretor da reta

$$\therefore (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) + k(5, 5, 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{1-x^2} - 1}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{1-x^2 \rightarrow 0} \frac{e^{1-x^2} - 1}{1 - x^2} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(1+x)(1+\sqrt{x})}{1-x} =$$

$$1 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} [(1+x)(1+\sqrt{x})] = 4$$

$$h(1) = 4 \Leftrightarrow 2(e^k - e^{-k}) + 1 = 4 \Leftrightarrow 2e^k - 2e^{-k} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2k} - 3e^k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^k = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow e^k = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow e^k = 2 \vee e^k = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \ln 2$$

Opção (B)

11.

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

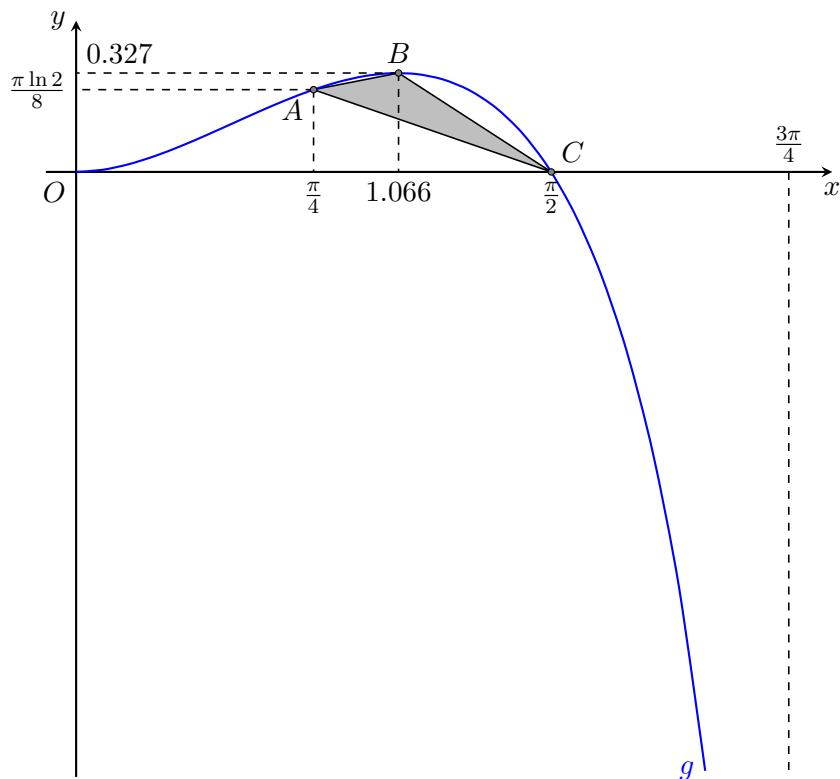
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} + x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \vee x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

A única solução positiva em $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ é $x = \frac{\pi}{2}$



$$A_{[ABC]} = \frac{\frac{\pi \ln 2}{8} + 0.327}{2} \times \left(1.066 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{(\frac{\pi}{2} - 1.066) \times 0.327}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \times \frac{\pi \ln 2}{8}}{2} \approx 0.06$$

12. C.A.)

$$\begin{array}{r} 6 & 1 & \boxed{4} \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ & & 5 \\ & & 1 \end{array}$$

$$i^{61} = i$$

$$w = \frac{(2-i)^3 + 8+i}{1+i} = \frac{(4-4i-1)(2-i) + 8+i}{i+i} = \frac{6-3i-8i-4+8+i}{1+i} = \frac{10-10i}{1+i}$$

C.A.)

$$|10-10i| = \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2} \quad \text{Arg}(10-10i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|i+i| = \sqrt{2} \quad \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$w = \frac{10\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}} = 10e^{i(-\frac{\pi}{2})} = 10e^{i(\frac{3\pi}{2})}$$

13.

$$m_r = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \quad r : y = -\sqrt{3} + b \Rightarrow 0 = -\sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3} \quad r : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_s \times (-\sqrt{3}) = -1 \Leftrightarrow m_s = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad s : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -3$$

Opção (A)

14.

14.1.

$$A_{[OAB]} = \frac{2 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$A_{[OCD]} = \frac{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \times \left[-\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{2} = -\frac{1}{2} \sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$-\frac{1}{2} \left[\sin(2\alpha) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos(2\alpha) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{4} \sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos(2\alpha)$$

$$A_{OBC} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} \times 1^2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
A_{Sombreada} &= A_{[OAB]} + A_{[OCD]} + A_{OBC} = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) + \frac{1}{4} \sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos(2\alpha) + \frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4} \sin(2\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

14.2.

$$A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cos(2\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3 \cos(2\alpha) = \sqrt{3} \sin(2\alpha) \Leftrightarrow \tan(2\alpha) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

| | | | | | |
|--------------|------|------------|-----------------|--------------|-----------------|
| α | 0 | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{3}$ |
| $f'(\alpha)$ | n.d. | + | 0 | - | n.d. |
| f | n.d. | \uparrow | Max. | \downarrow | n.d. |

A área da região sombreada é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

15. Se a reta de equação $y = 3x - 5$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, então:

$$f'(2) = 3 \text{ e } f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) \cdot f(x) - 3f(x) + 3f(x) - 3}{x - 2} = \\
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f'(x) - 3)}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(f(x) - 1)}{x - 2} &= f(2) \times f''(2) + 3f'(2) = \\
&= 1 \times (-3) + 3 \times 3 = 6
\end{aligned}$$

Opção (D)

Notar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, pois f é contínua em $x = 2$ uma vez que possui derivada finita nesse ponto