

Proposta de resolução - prova modelo 5

1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1.1.} \quad w &= \left(\frac{2\bar{z}_1^2 + z_2^3}{4i^{2019} + 4i^{2020}} + 3 + \sqrt{3} \right)^n = \left[\frac{2(\sqrt{3} + i)^2 + (2e^{i\frac{2\pi}{9}})^3}{-4i + 4} + 3 + \sqrt{3} \right]^n \\
 &= \left[\frac{2(2 + 2\sqrt{3}i) + 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{4(1-i)} + 3 + 3\sqrt{3} \right]^n = \left(\frac{4 + 4\sqrt{3}i - 4 + 4\sqrt{3}i}{4(1-i)} + 3 + \sqrt{3} \right)^n \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{3}i}{1-i} + 3 + \sqrt{3} \right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{2} + 3 + \sqrt{3} \right)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n = (2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}})^n \\
 &\qquad\qquad\qquad = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}
 \end{aligned}$$

w é um número real se:

$$\frac{n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

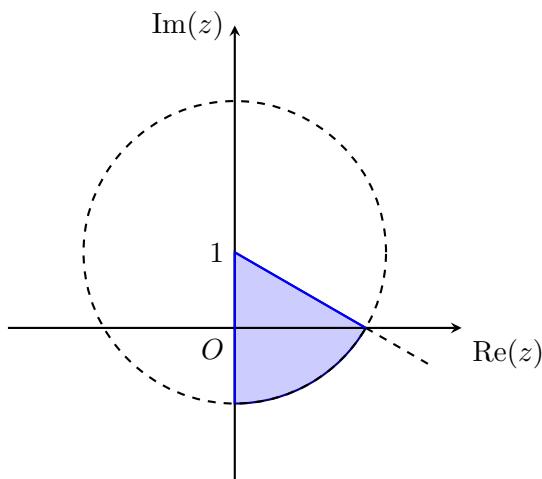
$$\Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}$$

O menor número natural para o qual w é um número real é $n = 6$, quando $k = 1$.

1.2.

$$|z - i| \leq |z_2| \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq \operatorname{Arg}(z_1)$$

$$\Leftrightarrow |z - i| \leq 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z - i) \leq -\frac{\pi}{6}$$



2.

$$\mathbf{2.1.} \quad A(x, 0, 0)$$

$$x - 0 + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A(2, 0, 0)$$

$$AD \perp ABC \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 1) \parallel AD$$

Uma equação vetorial que define a reta AD é, por exemplo:

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

2.2. Por 2.1 $D(2+k, -k, k)$ para algum $k \in \mathbb{R}$

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\pi}{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$V_{[ABCDEF]} = A_{[ABC]} \times \overline{AD} \Leftrightarrow 18 = 2\sqrt{3} \times \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+k-2)^2 + (-k-0)^2 + (k-0)^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}|k| = 3\sqrt{3}$$

$$|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm 3 \Rightarrow k = 3$$

Assim $D(5, -3, 3)$

2.3. Casos possíveis: 6C_3 número de conjuntos de três dos seis vértices do prisma

Casos favoráveis: ${}^4C_3 \times 3$: 3 representa o número de faces retangulares e 4C_3 representa o número de formas de escolher três dos quatro vértices numa face retangular.

$$P = \frac{{}^4C_3 \times 3}{{}^6C_3} = \frac{3}{5}$$

3.

$$\lim \left(2 - \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{2n^2 + 2 - n^2 - 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = \lim \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = \frac{\lim \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2}}{\lim \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}$$

Opção **D**

4. (A) é falsa pois g é crescente em $[a, b]$, uma vez que $g'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$

(B) é falsa pois g tem dois extremos relativos: $g(a)$ é mínimo relativo e $g(b)$ é máximo relativo

(C) é verdadeira pois g' é decrescente em $]-\infty, a[$ e decrescente em $]a, +\infty[$

(D) é falsa pois g' é decrescente à esquerda de $x = a$ e decrescente à direita de $x = a$, ou seja, não existe mudança de sinal na segunda derivada de g .

Opção **C**

5.

5.1. Seja h a altura do triângulo $[PQR]$ em relação à base $[QR]$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{h}{1} \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \overline{PQ} \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) &\Leftrightarrow 3\overline{PQ} = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow P_{[PQR]} = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \\ P_{[PQR]} = 2\sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{3} \right) &\Leftrightarrow P_{[PQR]} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) \\ &\Leftrightarrow P_{[PQR]} = 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned} P(x) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) &= 1 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{6} + x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

A única solução em $]0, \frac{\pi}{3}[$ é $x = \frac{\pi}{6}$

Assim, o valor de x para o qual o perímetro do triângulo $[PQR]$ é $\sqrt{3}$ é $x = \frac{\pi}{6}$.

6.

$$m_t = f'(5)$$

$$f'(x) = \frac{3(x-2)^2}{(x-2)^3} = \frac{3}{x-2}$$

$$f'(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

A inclinação da reta t é $\arctan(f'(5)) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Como $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$, então a inclinação da reta BC é $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

Opção A

7.

$$\begin{aligned} \frac{P(A|\overline{B}) \times (1 - P(B))}{P(A)} \times P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) &= \frac{P(A|\overline{B}) \times P(\overline{B})}{P(A)} \times (1 - P(A)) + P(A \cap \overline{B}) = \\ \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} \times (1 - P(A)) + P(A \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}|A) - P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}|A) \end{aligned}$$

8. Essa linha do triângulo de Pascal tem 2021 elementos, doze dos quais são inferiores ou iguais a ${}^{2020}C_5$ que são: os seis primeiros elementos (${}^{2020}C_0, {}^{2020}C_1, {}^{2020}C_2, {}^{2020}C_3, {}^{2020}C_4$ e ${}^{2020}C_5$) e os seis últimos elementos (${}^{2020}C_{2015}, {}^{2020}C_{2016}, {}^{2020}C_{2017}, {}^{2020}C_{2018}, {}^{2020}C_{2019}$ e ${}^{2020}C_{2020}$).

Assim $2021 - 12 = 2009$ dos elementos dessa linha são superiores a ${}^{2020}C_5$.

Opção B

9. ${}^7C_5 \times 8^2$ onde 7C_5 representa o número de formas de escolher 5 das 7 posições onde colocar os algarismos 2 e 8^2 representa o número de formas de preencher as restantes duas posições com algarismos diferentes de 2, mas podendo ser iguais entre si.

Opção A

10.

- 10.1. Seja $P_1(-3, 0)$ e $P_2(0, 1)$, então $m = \frac{1-0}{0+3} = \frac{1}{3}$ é o declive da assintota oblíqua ao gráfico de h . 1 é a ordenada na origem da assintota oblíqua ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3h(x) + \frac{x}{h(x)} \right) = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{3}x \right) + \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}} = -3 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = -3 + 3 = 0$$

Opção A

10.2.

$$\lim(u_n) = \lim \frac{\ln(n)}{n} = 0^+$$

$$\lim(v_n) = \lim(e^{-n} - n^2) = e^{-\infty} - (+\infty)^2 = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim[h(u_n) + h(v_n)] = h(0^+) + h(-\infty) = 0 + (-1) = -1$$

Opção C

11.

11.1.

$$f(3e) = 3e \ln(3e)^2 = 2 \times 3e (\ln 3 + \ln e) = 6e \left(\frac{\log_3 3}{\log_3 e} + 1 \right) = 6e \left(1 + \frac{1}{\log_3 e} \right)$$

11.2.

$$f'(x) = \ln x^2 + x \times \frac{2x}{x^2} = 2 + \ln x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{e}$$

| | | | | | | | |
|---------|------------|----------------|--------------|------|--------------|---------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{e}$ | | 0 | | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | n.d. | - | 0 | + |
| f | \uparrow | Maxs. | \downarrow | n.d. | \downarrow | Min. | \uparrow |

f é crescente em $[-\infty, -\frac{1}{e}]$ e em $[\frac{1}{e}, +\infty]$

f é decrescente em $[-\frac{1}{e}, 0]$ e em $[0, \frac{1}{e}]$

$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$ é máximo relativo de f e $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$ é mínimo relativo de f

12.

$$\begin{aligned}w &= z_2 - \overline{z_1}^2 = 2i - \left(e^{i(-\alpha)}\right)^2 = 2i - e^{i(-2\alpha)} = 2i - \cos(-2\alpha) - i \sin(-2\alpha) \\&= -\cos(2\alpha) + i(2 + \sin(2\alpha))\end{aligned}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(2\alpha) > 0 \wedge \sin(2\alpha) > 0 \Rightarrow -\cos(2\alpha) < 0 \wedge 2 + \sin(2\alpha) > 2$$

Assim, a única opção que verifica estas condições é a opção **C**

13.

13.1.

$$g(0) = -1$$

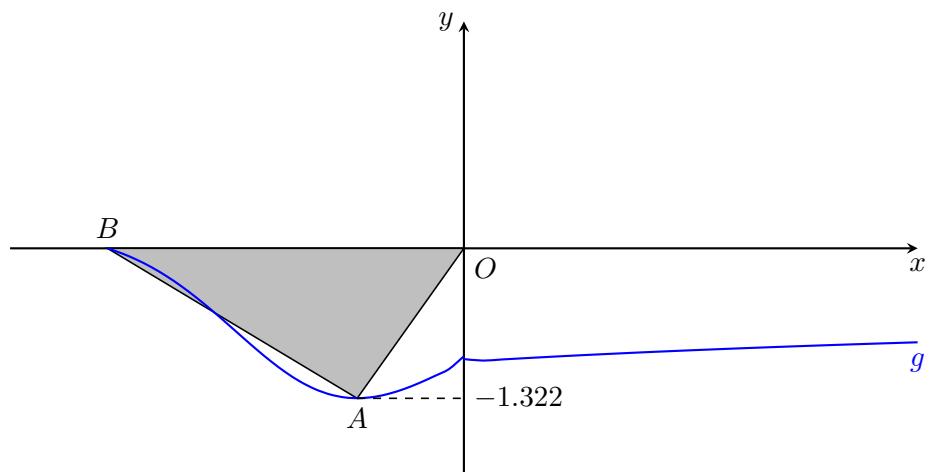
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4(2 - \sqrt{x+4})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4\left(4 - (\sqrt{x+4})^2\right)}{x(2 + \sqrt{x+4})} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x - 4}{x(2 + \sqrt{x+4})} = \\&= -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + \sqrt{x+4}} = -4 \times \frac{1}{4} = -1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\sin x} - 1}{x} = - \lim_{-\sin x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\sin x} - 1}{-\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1 \times 1 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$, então g é contínua em $x = 0$

13.2.

$$g(-\pi) = \frac{e^{-\sin \pi} - 1}{-\pi} = \frac{e^0 - 1}{-\pi} = 0$$



$$A_{[OAB]} = \frac{\pi \times 1.322}{2} \approx 2.1$$