

# Sugestão de resolução

## Caderno 1

1. Em qualquer linha do Triângulo de Pascal o primeiro elemento e o último são iguais a 1.

Por outro lado, o segundo elemento é igual ao penúltimo.

Seja  $n$  o segundo elemento da linha em causa.

$$1 \times n \times n \times 1 = 441 \Leftrightarrow n^2 = 441 \Leftrightarrow n = 21$$

Trata-se da linha de ordem 21 ( $n = 21$ ).

A linha seguinte é a de ordem 22 ( $n = 22$ ).

O terceiro elemento da linha seguinte é igual a  ${}^{22}C_2 = 231$ .

**Resposta: (B)**

2. Número de casos possíveis:  ${}^{10}C_2 = 45$

Número de casos favoráveis:

Os divisores de 12 menores ou iguais a 10 são 1, 2, 3, 4 e 6.

Portanto, há dois casos favoráveis:  $2 \times 6$  e  $3 \times 4$ .

$$P = \frac{2}{45}$$

**Resposta: (B)**

3. Sejam  $M$  e  $C$  os acontecimentos:

$M$ : "O aluno escolhido obteve classificação positiva no exame de Matemática A."

$C$ : "O aluno escolhido foi colocado no ensino superior na 1.<sup>a</sup> opção de candidatura."

É dado que:

$$\bullet P(C|M) = 0,96$$

$$\bullet P(M|C) = 0,9$$

$$\bullet P(C) = \frac{4}{5}$$

**3.1.** Pretende-se determinar  $P(M)$ .

$$\begin{aligned} P(C|M) &= \frac{P(C \cap M)}{P(M)} \Leftrightarrow 0,96 = \frac{P(C) \times P(M|C)}{P(M)} \Leftrightarrow 0,96 = \frac{\frac{4}{5} \times 0,9}{P(M)} \Leftrightarrow P(M) \times 0,96 = 0,72 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(M) = \frac{0,72}{0,96} \Leftrightarrow P(M) = 0,75 \end{aligned}$$

A probabilidade de o aluno ter obtido classificação positiva no exame de Matemática A é igual a 0,75.

**3.2.** Seja  $n$  o número de alunos do 12.<sup>º</sup> ano que realizaram o exame de Matemática A nessa escola.

Como dos alunos colocados no ensino superior na 1.<sup>a</sup> opção de candidatura apenas 16 não obtiveram positiva no exame de Matemática A, temos que  $P(C \cap \bar{M}) = \frac{16}{n}$ .

$$\text{Por outro lado: } P(C \cap \bar{M}) = P(C) - P(M \cap C) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times 0,9 = 0,08$$

$$\text{ou } P(C \cap \bar{M}) = P(C) \times P(\bar{M}|C) = \frac{4}{5} \times (1 - 0,9) = 0,08$$

$$\frac{16}{n} = 0,08 \Leftrightarrow 16 = 0,08n \Leftrightarrow n = \frac{16}{0,08} \Leftrightarrow n = 200$$

Nessa escola, realizaram o exame de Matemática A 200 alunos.

**Resposta: (A)**

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \overline{DE} + \overline{DF} = 2a \Leftrightarrow && \text{Definição de elipse} \\
 & \Leftrightarrow \overline{DE} + \overline{DE} = 2a \Leftrightarrow && \overline{DF} = \overline{DE} \\
 & \Leftrightarrow 3 + 3 = 2a \Leftrightarrow a = 3 && \overline{ED} = 3
 \end{aligned}$$

$$\overline{EF} = 4 \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

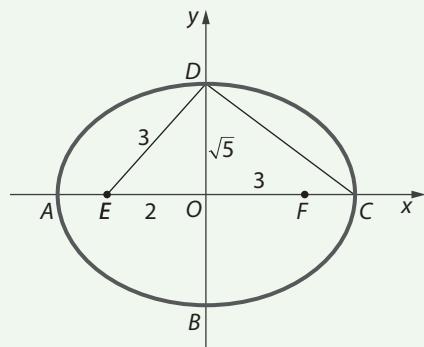
$$3^2 = b^2 + 2^2 \Leftrightarrow b^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow b = \sqrt{5}$$

Portanto,  $\overline{OD} = b = \sqrt{5}$  e  $\overline{OC} = a = 3$ .

$$\overline{DC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$$

$$\overline{DC}^2 = (\sqrt{5})^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{DC}^2 = 5 + 9 \Leftrightarrow \overline{DC} = \sqrt{14}$$

$$\text{Perímetro}_{[DEC]} = \overline{DE} + \overline{EO} + \overline{OC} + \overline{DC} = 3 + 2 + 3 + \sqrt{14} = 8 + \sqrt{14} \approx 11,7$$



**Resposta: (A)**

5.  $A(1, 1, 0)$

5.1.  $P(2, -1, 2)$

$$\overrightarrow{AO} = O - A = (0, 0, 0) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2, -1, 2) - (1, 1, 0) = (1, -2, 2)$$

$$\cos(\widehat{OAP}) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AP}}\right) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AO}\| \times \|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{(-1, -1, 0) \cdot (1, -2, 2)}{\sqrt{1+1+0} \times \sqrt{1+4+4}} = \frac{-1+2+0}{\sqrt{2} \times \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{Se } \cos(\widehat{OAP}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \text{ então } \widehat{OAP} \approx 76,4^\circ.$$

5.2.  $C(x, x, 0), x > 0$

Seja  $E$  o centro da base da pirâmide.

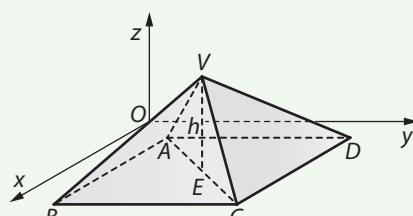
O ponto  $E$  é o ponto médio de  $[AC]$ :

$$E\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, 0\right)$$

A altura da pirâmide é  $h = \overline{EV}$ .

O vértice  $V$  tem abscissa e ordenada iguais às de  $E$ :

$$V\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, h\right)$$



$$\overrightarrow{AC} = C - A = (x, x, 0) - (1, 1, 0) = (x-1, x-1, 0)$$

$$\overrightarrow{AV} = V - A = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{2}, h\right) - (1, 1, 0) = \left(\frac{x+1}{2} - 1, \frac{x+1}{2} - 1, h\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, h\right)$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} &= (x-1, x-1, 0) \cdot \left(\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}, h\right) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} + 0 \times h = \\
 &= 2 \times \frac{(x-1)^2}{2} = (x-1)^2
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4 \vee x-1 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3$$

Como  $x > 0$ , temos  $x = 5$ , pelo que  $C(5, 5, 0)$ .

6. Seja  $x$  a abcissa do ponto  $B$ .

$$B(x, \ln x) \text{ com } x \in ]1, 5[$$

$C$  pertence à reta de equação  $y=x$  e tem ordenada igual à de  $B$  porque, sendo  $[OABC]$  um paralelogramo, a reta  $CB$  é paralela ao eixo  $Ox$ .

$$C(\ln x, \ln x)$$

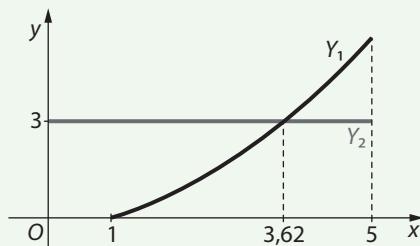
$$\overline{BC} = |x - \ln x|$$

A altura do paralelogramo é igual a  $\ln x$ , ordenada do ponto  $B$ .

$$A_{[OABC]} = \text{base} \times \text{altura} = |x - \ln x| \times \ln x$$

$$\text{Pretende-se resolver a equação: } A_{[OABC]} = 3 \Leftrightarrow |x - \ln x| \times \ln x = 3.$$

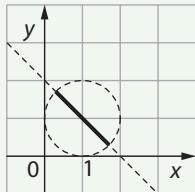
Ao recorrer à calculadora gráfica obteve-se a abcissa do ponto de interseção do gráfico de  $Y_1 = |x - \ln x| \times \ln x$  com o gráfico de  $Y_2 = 3$ .



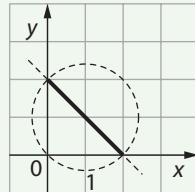
A abcissa do ponto  $B$  é aproximadamente igual a 3,62.

## Caderno 2

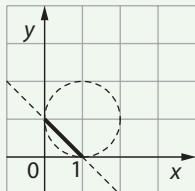
7.  $\arg(z-2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq 1$



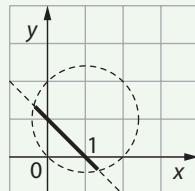
$\arg(z-2) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2}$



$\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq 1$



$\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4} \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2}$



**Resposta: (A)**

$$\begin{aligned}
 8. \quad z &= \frac{(2-i)^3 - 9i^{31}}{2\sqrt{2}i} = \frac{(2-i)^2 \times (2-i) - 9i^{4 \times 7 + 3}}{2\sqrt{2}i} = \\
 &= \frac{(4-4i+i^2) \times (2-i) - 9i^3}{2\sqrt{2}i} = \frac{(3-4i)(2-i)+9i}{2\sqrt{2}i} = \\
 &= \frac{6-3i-8i+4+9i}{2\sqrt{2}i} = \frac{2-2i}{2\sqrt{2}i} = \frac{2(1-i)}{2\sqrt{2}i} = \frac{(1-i)(-\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}i(-\sqrt{2}i)} = \\
 &= \frac{-\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Seja  $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ .

$$\begin{cases} \tan \theta = 1 \\ \theta \in 3^{\circ} \text{ Q} \end{cases} \implies \theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \sqrt[3]{1} e^{i\left(\frac{-3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{-3\pi + 8k\pi}{12}\right)} ; k = 0, 1, 2$$

$$\text{Para } k=0: z_0 = e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{Para } k=1: z_1 = e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

$$\text{Para } k=2: z_2 = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

As raízes cúbicas de  $z$  são:  $e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}, e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$ .

$$9. \lim x_n = \lim \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n}{n}}} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n}{n^2}}} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

**Opção (A):**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Se  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$ .

**Opção (B):**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

**Opção (C):**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \\ &= 0 + \frac{0}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

**Opção (D):**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

**Resposta: (A)**

- 10.** Sabe-se que  $f$  é uma função duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R}$  (função polinomial) e que o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo em  $] -\infty, 0[$  e a concavidade voltada para cima em  $] 0, +\infty[$ .

Logo,  $\forall x \in ] -\infty, 0[$ ,  $f''(x) \leq 0$  e  $\forall x \in ] 0, +\infty[$ ,  $f''(x) \geq 0$ .

Então,  $f''(-a) \leq 0$ ,  $f''(0) = 0$  e  $f''(a) \geq 0$ .

Da observação do gráfico também se pode concluir que  $f(0) > 0$ .

Assim:

- Se  $f''(0) = 0$  e  $f''(a) \geq 0$ , então  $f''(a) + f''(0) \geq 0$ . (a opção (A) é falsa)
- $f''(-a) \leq 0$  e  $f''(a) \geq 0$  não garante que  $f''(-a) + f''(a) = 0$  (a opção (B) é falsa)
- Como  $f(0) > 0$  e  $f''(a) \geq 0$ , então  $f''(a) \times f(0) \geq 0$ . (a opção (C) é falsa)
- Se  $f''(-a) \leq 0$  e  $f''(a) \geq 0$ , então  $f''(-a) \times f''(a) \leq 0$ . (a opção (D) é verdadeira)

**Resposta: (D)**

- 11.**  $a_n = \log_3 2^n$

$$a_{n+1} - a_n = \log_3 2^{n+1} - \log_3 2^n = \log_3 \frac{2^{n+1}}{2^n} = \log_3 2$$

$(a_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $r = \log_3 2$ . Como  $r > 0$ ,  $a_{n+1} - a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pelo que a progressão aritmética é crescente.

$$b_n = \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_3 2^{-n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \log_3 2^{-(n+1)} - \log_3 2^{-n} = \log_3 \frac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = \log_3 2^{-1} = -\log_3 2$$

$(b_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $r = -\log_3 2$ . Como  $r < 0$ ,  $b_{n+1} - b_n < 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pelo que a progressão aritmética é decrescente.

**Resposta: (B)**

- 12.**  $f(x) = \begin{cases} k - \frac{x}{e^{x+3}} & \text{se } x < 0 \\ 3 \ln(x+1) + 2x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

- 12.1.** Seja  $y = mx + b$  a equação reduzida da reta  $t$ , tangente ao gráfico da função  $f$ , no ponto de abcissa  $-3$ .

Sabemos que  $m = f'(-3)$  e  $b = 0$ , dado que a reta  $t$  passa na origem do referencial.

Em  $] -\infty, 0[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(k - \frac{x}{e^{x+3}}\right)' = 0 - \left(\frac{x'e^{x+3} - x(e^{x+3})'}{(e^{x+3})^2}\right) = \\ &= -\frac{e^{x+3} - xe^{x+3}}{(e^{x+3})^2} = -\frac{e^{x+3}(1-x)}{(e^{x+3})^2} = \frac{x-1}{e^{x+3}} \end{aligned}$$

$$m = f'(-3) = \frac{-3-1}{e^{-3+3}} = \frac{-4}{e^0} = -4$$

$$f(-3) = k - \frac{-3}{e^{-3+3}} = k + \frac{3}{e^0} = k + 3$$

Ponto de tangência:  $(-3, k+3)$

Equação reduzida da reta  $t$ :  $y = -4x$  ( $m = -4$  e  $b = 0$ )

O ponto de tangência de coordenadas  $(-3, k+3)$  pertence à reta de equação  $y = -4x$ .

Portanto:

$$k+3 = -4 \times (-3) \Leftrightarrow k = 12 - 3 \Leftrightarrow k = 9$$

**12.2.** Seja  $y = mx + b$  a equação reduzida da assíntota ao gráfico da função  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , caso exista.

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x+1) + 2x - 1}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3 \ln(x+1)}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x+1)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right) = \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} + 2 - 0 \stackrel{(0)}{=} \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[ x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} + 2 = \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} + 2 = \\
&= 3 \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \right] + 2 = \\
&= 3 \times \left( 0 + \frac{\ln 1}{+\infty} \right) + 2 = 3(0+0)+2=2
\end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 \ln(x+1) + 2x - 1 - 2x] = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 \ln(x+1) - 1] = +\infty - 1 = +\infty$$

Como  $b \notin \mathbb{R}$ , o gráfico da função  $f$  não admite assíntota quando  $x \rightarrow +\infty$ .

**12.3.** Em  $]0, +\infty[$ , temos:

$$f'(x) = [3 \ln(x+1) + 2x - 1]' = 3[\ln(x+1)]' + (2x-1)' =$$

$$= 3 \times \frac{(x+1)'}{x+1} + 2 = \frac{3}{x+1} + 2$$

$$f''(x) = \left( \frac{3}{x+1} + 2 \right)' = \frac{-3}{(x+1)^2} + 0 = -\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$-\frac{3}{(x+1)^2} < 0, \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

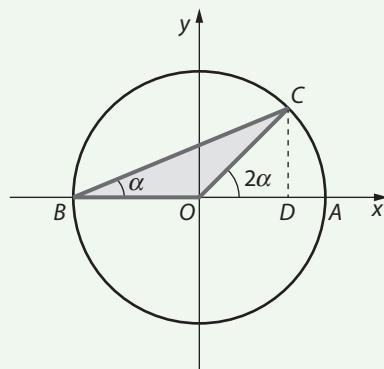
Como  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in ]0, +\infty[$ , podemos concluir que o gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para baixo em  $]0, +\infty[$ . Logo, o gráfico da função  $f$  não tem pontos de inflexão neste intervalo.

**13.** Se  $\hat{ABC} = \alpha$ , então  $\hat{AOC} = 2\alpha$ .

$$\overline{CD} = \sin(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} A_{[OCB]} &= \frac{\overline{BO} \times \overline{CD}}{2} = \frac{1 \times \sin(2\alpha)}{2} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

**Resposta: (B)**



- 14.** Dado que o ponto  $P$  pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio 1 , as suas coordenadas são  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  .

**14.1.** Sejam  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$  e  $B(1, 1)$ .

$$\begin{aligned}\overline{BP} &= \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + 1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{2 + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} = \sqrt{2 + 1 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} \\ d(\alpha) &= \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14.2. d'(\alpha) &= \left( \sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha} \right)' = \left[ (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}} \right]' = \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}-1} \times (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)' = \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{-\frac{1}{2}} \times (2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^{\frac{1}{2}}} \times 2 (\sin \alpha - \cos \alpha) = \\
 &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}}
 \end{aligned}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}} = 0 \wedge \alpha \in [0, 2\pi[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = 0 \wedge \alpha \in [0, 2\pi[ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \wedge \alpha \in [0, 2\pi[ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \vee \alpha = \dots$$

$\alpha$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$2\pi$
$d'$		-	0	+	0	-	
$d$	1						

A função  $d$  é estritamente decrescente em  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  e em  $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$  e estritamente crescente em  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ .

$d$  admite máximos relativos para  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$  e um mínimo relativo para  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} [(x^2-1) \ln(x-1)]} = e^0 = 1 \text{ dado que:}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} [(x^2 - 1) \ln(x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x + 1)(x - 1) \ln(x - 1)] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x - 1) \ln(x - 1)] = \\
&= 2 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x - 1) \ln(x - 1)] = \\
&= 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right] = 2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) = \\
&= -2 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = -2 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{y}$$

Se  $x \rightarrow 1^+$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .