

Sugestão de resolução

Caderno 1

1. 1.º A 2.º A 3.º A 4.º A

9 8 7 1 Números cujo algarismo das unidades é 0.

8 8 7 4 Números cujo algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 504 + 1792 = 2296$$

Resposta: (A)

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2P(B) = 5P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P(A) = 5P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 2P(B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) - P(B) = 5P(A \cap B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{4}$$

Resposta: (C)

3. $\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} + 1 = u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} - u_n = -1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão -1 sendo $u_1 = 100$.

$$u_n = 100 + (n - 1) \times (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 100 - n + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 101 - n$$

$$S_k = \frac{u_1 + u_k}{2} \times k = \frac{100 + 101 - k}{2} \times k = \frac{(201 - k)k}{2}$$

$$\left| S_N = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N \right.$$

$$S_k = 0 \Leftrightarrow \frac{(201 - k)k}{2} = 0 \Leftrightarrow (201 - k)k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 201 - k = 0 \vee k = 0 \stackrel{k \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} k = 201$$

Resposta: (D)

4.

4.1. Começamos por calcular a probabilidade do acontecimento contrário (as quatro bolas pretas saírem todas seguidas).

Número de casos possíveis: $10!$

Número de casos favoráveis: $4! \times 6! \times 7$

$$P = \frac{4! \times 6! \times 7}{10!} = \frac{1}{30}$$

A probabilidade de as quatro bolas pretas **não** saírem todas seguidas é:

$$1 - P = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

4.2. Seja n o número de bolas pretas posteriormente colocadas no saco.

Bolas brancas: 6

Bolas pretas: $4 + n$

Total: $6 + 4 + n = 10 + n$

$$P(A) = \frac{6}{10+n}$$

$P(B|A) = \frac{4+n}{9+n}$ (após ser retirada uma bola branca ficaram na caixa $9+n$ bolas sendo $4+n$ pretas)

$$P(B|A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4+n}{9+n} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16 + 4n = 27 + 3n \Leftrightarrow n = 11$$

Foram colocadas no saco 11 bolas pretas.

5.

$$\begin{aligned} 5.1. f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 e^{(-1+h)+1} - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-1)^2 e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 2h + 1) e^h - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 - 2h) e^h + e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)e^h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(h-2)e^h] + 1 = -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

5.2. A reta t , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , tem declive igual a $f'(-1) = -1$.

Qualquer reta paralela a t tem declive -1 .

Pretende-se provar que existe $x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$ tal que $f'(x) = -1$.

No intervalo $]-\infty, 0[$ a função f' é definida por:

$$f'(x) = (x^2 e^{x+1})' = 2x e^{x+1} + x^2 e^{x+1} = x e^{x+1} (2+x)$$

• f' é uma função contínua em $]-\infty, 0[$ por ser definida pelo produto e composta de funções contínuas (funções polinomiais e função exponencial). Logo, f' é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}+1} \left(2 - \frac{1}{2}\right) \approx -1,24$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}+1} \left(2 - \frac{1}{4}\right) \approx -0,93$$

$$-1,24 < -1 < -0,93, \text{ ou seja, } f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\begin{cases} f' \text{ é contínua em } \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right] \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) < -1 < f'\left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \implies \exists x \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[: f'(x) = -1$$

$$\begin{aligned} 5.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3 = \ln 1 + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3x - 3x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^y - 1} \times y = \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{e^y - 1}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^y - 1} \end{aligned}$$

Se $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$.

6. $A(0, 1)$

$B(x, e^x)$ com $x \in]0, 2[$

$C(0, e^x)$

$$\overline{CD} = 1$$

$$\overline{AC} = |e^x - 1| = e^x - 1, \text{ porque se } x > 0, e^x - 1 > 0.$$

$$\overline{BC} = |x - 0| = x, \text{ porque } x > 0.$$

$$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$$

A área do triângulo $[ABC]$ pode ser calculada por dois processos:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} = \frac{x(e^x - 1)}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2}$$

A abcissa do ponto B terá de ser solução da equação $\frac{x(e^x - 1)}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2}$ no intervalo $]0, 2[$.

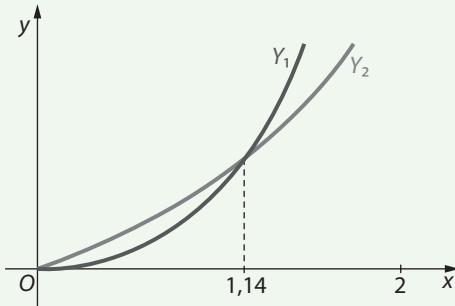
$$\frac{x(e^x - 1)}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{2} \Leftrightarrow x(e^x - 1) = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$$

Na calculadora gráfica, fazendo:

$$\bullet Y_1 = x(e^x - 1)$$

$$\bullet Y_2 = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$$

determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos respetivos gráficos.



A abcissa do ponto B é aproximadamente igual a 1,14.

Caderno 2

7. $h(x) = f(x) \times \ln[f(x)]$

$$h'(x) = [f(x) \times \ln[f(x)]]' =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f(x) \times [\ln[f(x)]]' =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)} =$$

$$= f'(x) \times \ln[f(x)] + f'(x)$$

Como $f(1) = f'(1) = e$, então:

$$h'(1) = f'(1) \times \ln[f(1)] + f'(1) = e \times \ln e + e = e \times 1 + e = 2e$$

Resposta: (B)

8. $g(x) = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

$\bullet D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \right\}$

$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$D_g = [-2, 2]$

\bullet Contradomínio de g :

Para $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi \leq -2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \pi \Leftrightarrow \pi - \pi \leq \pi - 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \pi + \pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \pi - 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2\pi$$

Logo, $D'_g = [0, 2\pi]$.

$$\begin{array}{c} [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \curvearrowright \arcsin x \end{array}$$

Resposta: (D)

9. Sejam (a, b) as coordenadas do ponto C .

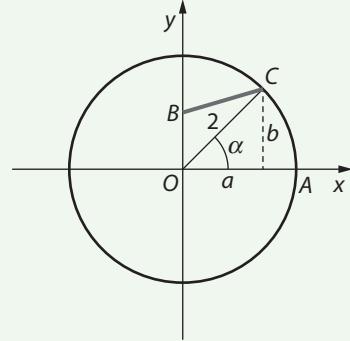
$$\frac{a}{2} = \cos \alpha \Leftrightarrow a = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{b}{2} = \sin \alpha \Leftrightarrow b = 2 \sin \alpha$$

$$C(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$$

$$B(0, 1)$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2 \cos \alpha - 0)^2 + (2 \sin \alpha - 1)^2} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha + 1} = \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 1 - 4 \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{4 \times 1 + 1 - 4 \sin \alpha} = \sqrt{5 - 4 \sin \alpha} \end{aligned}$$



Resposta: (A)

10. $r: (x, y, z) = (1, 0, 1) + k(4 - 3a, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(4 - 3a, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r .

$$\beta: x + az = 1$$

$\vec{u}(1, 0, a)$ é um vetor perpendicular ao plano β .

Se a reta r é paralela ao plano β , então $\vec{r} \perp \vec{u}$, pelo que $\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow (4 - 3a, 0, 1) \cdot (1, 0, a) = 0 \Leftrightarrow (4 - 3a) \times 1 + 1 \times a = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a + a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

Resposta: (A)

11. $A(6, 6, 0)$ e $B(0, 0, 3)$

11.1. $\vec{AB} = B - A = (0, 0, 3) - (6, 6, 0) = (-6, -6, 3) = -6\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$

Reta AB : $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

Um ponto da reta AB é da forma $(x, y, z) = \left(k, k, 3 - \frac{k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Se x é abcissa do ponto P , as coordenadas de P são $(x, x, 3 - \frac{x}{2})$ com $x \in]0, 6[$.

A medida da aresta da base da pirâmide é x e a altura é $3 - \frac{x}{2}$. Logo, o volume é dado por:

$$V(x) = \frac{1}{3} \times x^2 \times \left(3 - \frac{x}{2}\right) = x^2 - \frac{x^3}{6}$$

$$11.2. V'(x) = \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right)' = 2x - \frac{3}{6}x^2 = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x \left(2 - \frac{1}{2}x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Como $x \in]0, 6[$, vem $x = 4$.

x	0		4		6
V'		+	0	-	
V		↗	Máx.	↘	

O volume da pirâmide é máximo para $x = 4$.

Se $x = 4$, a altura da pirâmide é $3 - \frac{4}{2} = 1$.

A altura da pirâmide de volume máximo é igual a 1.

12. Como $|z| = 1$, $|z^3| = 1$.

$$\operatorname{Arg}(z^3) = 3 \operatorname{Arg}(z)$$

De entre os números complexos representados, podemos concluir (pela regra do paralelogramo) que $z + z^3$ só pode ser igual a z_4 .

Resposta: (D)

$$13. z = \frac{\sqrt{3} - i^{11}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} - 1} = \frac{\sqrt{3} - i^{4 \times 2 + 3}}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - i^3}{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) - 1} = \frac{\sqrt{3} - (-i)}{1 + i - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + i}{i} = \frac{(\sqrt{3} + i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{-\sqrt{3}i + 1}{1} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Seja $\operatorname{Arg}(z) = \theta$.

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3} \\ \theta \in 4.^{\circ}\text{Q} \end{cases}$$

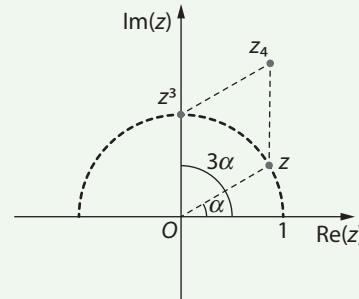
$$z = 2 e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z^n = \left(2 e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right)^n = 2^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{3}\right)}$$

$$z^n \text{ é um número real negativo} \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -3 - 6k, k \in \mathbb{Z}$$

O menor número natural n é 3 e obtém-se para $k = -1$.



14. $f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{4x}$, $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \mathbf{14.1.} f'(x) &= \frac{(1 - 2 \ln x)'(4x) - (1 - 2 \ln x)(4x)'}{(4x)^2} = \frac{\left(0 - 2 \times \frac{1}{x}\right)(4x) - (1 - 2 \ln x) \times 4}{16x^2} = \\ &= \frac{-8 - 4 + 8 \ln x}{16x^2} = \frac{-12 + 8 \ln x}{16x^2} = \frac{4 \times (-3 + 2 \ln x)}{16x^2} = \frac{-3 + 2 \ln x}{4x^2} \\ f''(x) &= \frac{(-3 + 2 \ln x)'(4x^2) - (-3 + 2 \ln x)(4x^2)'}{(4x^2)^2} = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times 4x^2 - (-3 + 2 \ln x) \times 8x}{16x^4} = \\ &= \frac{8x + 24x - 16x \ln x}{16x^4} = \frac{32x - 16x \ln x}{16x^4} = \frac{16x(2 - \ln x)}{16x^4} = \frac{2 - \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x^3} = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Dado que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^3 > 0$, o sinal de f'' depende apenas do sinal de $2 - \ln x$.

x	0		e^2	$+\infty$
f''		+	0	-
f		()

P.I.

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]0, e^2[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]e^2, +\infty[$. O ponto de abcissa e^2 é um ponto de inflexão.

$$\begin{aligned} \mathbf{14.2.} f(x) > f(2x) &\Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{4x} > \frac{1 - 2 \ln(2x)}{4 \times (2x)} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{4x} - \frac{1 - 2 \ln(2x)}{8x} > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 4 \ln x - 1 + 2 \ln(2x)}{8x} > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 4 \ln x + 2 \ln(2x) > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow -4 \ln x + 2 \ln(2x) > -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \ln x - \ln(2x) < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x^2 - \ln(2x) < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{2x}\right) < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} < e^{\frac{1}{2}} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < 2e^{\frac{1}{2}} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < 2\sqrt{e} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2\sqrt{e}[\\ S &=]0, 2\sqrt{e}[\end{aligned}$$

15. $g(x) = x \times f(x)$

$$g'(x) = [x \times f(x)]' = x' \times f(x) + x \times f'(x) = f(x) + x \times f'(x)$$

Se a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é paralela à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a , então as duas retas têm o mesmo declive, ou seja, $f'(a) = g'(a)$.

Como $g'(x) = f(x) + x \times f'(x)$, então $g'(a) = f(a) + a \times f'(a)$.

$$f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow f'(a) = f(a) + a \times f'(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(a) - a \times f'(a) = f(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(a)(1 - a) = f(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(a) = (1 - a) \times f'(a)$$