



Nome: _____

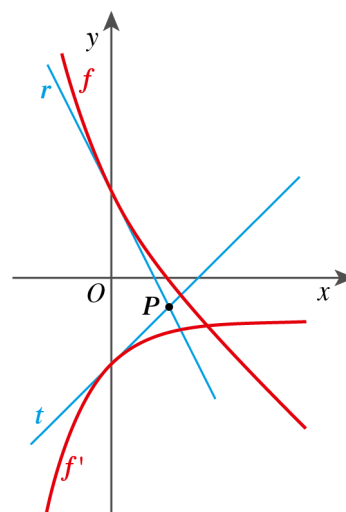
Ano / Turma: _____ N.º: _____ Data: ____ - ____ - ____

-
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
 - A prova inclui um formulário.
 - As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.
-

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , as funções f e f' (função derivada de f), sendo f definida por $f(x) = e^{-x} - x + 1$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseja Oy ;
- a reta t é tangente ao gráfico de f' no ponto em que este interseja Oy ;
- o ponto de interseção das retas r e t é designado por P .



1.1. Determina $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2}{x}$.

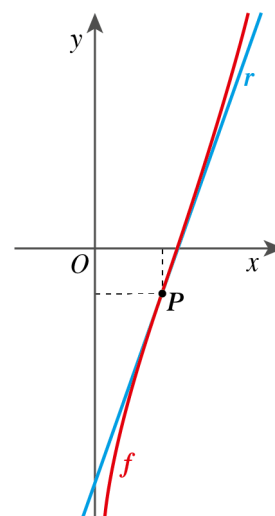
1.2. Resolve a equação $f'(x) = f''(x) - e^x$.

1.3. Determina as coordenadas do ponto P .

2. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por:

$$f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , a função f e a reta r tangente ao gráfico de f no ponto P com declive mínimo.



2.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$.

2.2. Determina a abcissa do ponto P .

3. Seja k um número real positivo e f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por:

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{k}{x} \right) - x$$

- 3.1. Podes concluir que $f(1)$ é igual a:

(A) $-1 + \ln k$ (B) 0 (C) $\ln \left(\frac{1+k}{e} \right)$ (D) -1

- 3.2. Mostra que a reta de equação $y = -x + k$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

4. Dois alunos do 12.º ano, a Sofia e o Bernardo, influenciados pelas notícias diárias sobre o novo coronavírus, pesquisaram dados relativos à evolução do número total de contágios validados.



De 7 a 23 de fevereiro de 2020, em dias distintos, a Sofia e o Bernardo fizeram a recolha de dados e, com recurso às capacidades gráficas da calculadora, obtiveram dois modelos matemáticos.

Modelo da Sofia	Modelo do Bernardo
$S(t) = \frac{88\,960}{1 + 1,84e^{-0,24t}}$ <p>$S(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.</p>	$B(t) = 36\,257e^{0,075t}$ <p>$B(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.</p>

- 4.1. Calcula $B(4)$.

Apresenta o resultado arredondado às unidades e interpreta-o, no contexto apresentado.

- 4.2. No final do dia 14 de fevereiro, o número de contágios validados era 67 100.

Qual dos modelos apresenta um resultado mais próximo do resultado real?

Justifica, de forma clara, a tua resposta.

5. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ x \cos(2x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

5.1. $f(\alpha) \times f(-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, é necessariamente igual a:

(A) $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$ (B) $\cos(4\alpha)$ (C) $-\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ (D) $-\frac{\sin(4\alpha)}{2}$

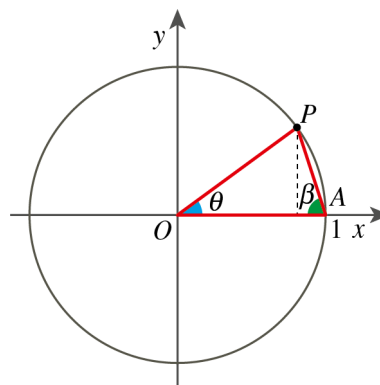
5.2. Mostra que a função f é descontínua em $x = 0$.

5.3. Seja A um ponto do gráfico de f cuja abcissa pertence ao intervalo $[-\pi, 0[$ e é zero da função. Determina as coordenadas do ponto A .

6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto P pertence à circunferência;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP , com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- β é a amplitude, em radianos, do ângulo PAO .



Recorre às capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor arredondado às centésimas da abcissa do ponto P , no caso em que $\beta = 2\theta$.

Tem em atenção que $\tan \beta = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$.

Na resposta deves incluir:

- a equação que permite determinar o valor de θ ;
- a reprodução, num referencial, da resolução gráfica da equação, apresentando o valor de θ com quatro casas decimais;
- a abcissa de P arredondada às centésimas.

FIM

Cotações														Total
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	
Pontos	13	15	20	15	20	13	15	13	13	13	15	15	20	200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \quad e \quad n \in \mathbb{N})$$

PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1.

1.1. $f'(x) = (e^{-x} - x + 1)' = -e^{-x} - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{-x} - 1)}{x}.$$

Se $-x = y$, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Resposta: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2}{x} = 1$

1.2. $f'(x) = f''(x) - e^x$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$f''(x) = (-e^{-x} - 1)' = e^{-x}$$

$$f'(x) = f''(x) - e^x \Leftrightarrow -e^{-x} - 1 = e^{-x} - e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = -1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Resposta: C.S. = $\{\ln 2\}$

1.3. Ponto de interseção do gráfico de f com Oy : $A(0, f(0))$

$$A(0, 2)$$

Declive da reta r : $f'(0) = -2$

Equação reduzida da reta r : $y = -2x + 2$

Ponto de interseção do gráfico de f' com Oy : $B(0, f'(0))$

$$B(0, -2)$$

Declive da reta t : $f''(0) = 1$

Equação reduzida da reta t : $y = x - 2$

Interseção das retas r e t :

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Resposta: As coordenadas do ponto P são $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2.

2.1. $f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{2}{x}\right) = x^2 - \ln 2 + \ln x$

$$f'(x) = (x^2 - \ln 2 + \ln x)'$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$



2.2. O declive da reta tangente é mínimo quando a derivada tem um mínimo.

$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{4x^2 - (2x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$					-	0	+
$f'(x)$							

A primeira derivada atinge o mínimo quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: A abcissa do ponto P é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

3.1. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - x$

$$f(1) = \ln\left(1 + \frac{k}{1}\right) - 1 = \ln(1+k) - 1 = \ln(1+k) - \ln(e) = \ln\left(\frac{1+k}{e}\right)$$

Resposta: (C) $\ln\left(\frac{1+k}{e}\right)$

3.2. $y = -x + k$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + k)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - x - (-x + k) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - k \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x - k \right) = -k + \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = -k + \ln(e^k) = -k + k = 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + k)) = 0$, conclui-se que a reta $y = -x + k$ é assíntota ao gráfico de f .

4.

4.1. $B(t) = 36\,257 e^{0,075t}$

$t = 0$ corresponde ao dia 7 de fevereiro e $t = 4$ ao dia 11 de fevereiro.

$$B(4) = 36\,257 \times e^{0,075 \times 4}$$

$B(4) \approx 48\,942$ que corresponde ao valor dado pelo modelo para o número de pessoas contagiadas e confirmadas até ao final do dia 11 de fevereiro.

4.2. Valor real no final do dia 14: 67 100

$$\text{Valor dado pelo modelo da Sofia: } S(7) = \frac{88\,960}{1 + 1,84e^{-0,24 \times 7}} \approx 66\,243$$

$$\text{Valor dado pelo modelo do Bernardo: } B(7) = 36\,257 \times e^{0,075 \times 7} \approx 61\,291$$

O valor encontrado a partir do modelo da Sofia é mais próximo do real do que o valor dado pelo modelo do Bernardo.

5.

5.1. Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$, então $-\alpha \in \mathbb{R}^-$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) \times f(-\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{\alpha} \times (-\alpha \cos(2\alpha)) = -\sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \\ &= -\frac{1}{2} (2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)) = -\frac{1}{2} \sin(4\alpha) \end{aligned}$$

Resposta: (D) $-\frac{\sin(4\alpha)}{2}$

5.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x}$

Se $2x = y$, tem-se:

$$2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos(2x) = 0$$

Não existe limite em $x = 0$ e, dado que $0 \in D_f$, então f não é contínua em $x = 0$.

5.3. Seja x a abcissa do ponto A.

$$f(x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow x \cos(2x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[$$

$$\cos(2x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

O ponto A tem coordenadas $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Resposta: $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

6. O ponto P tem coordenadas $(\cos \theta, \sin \theta)$.

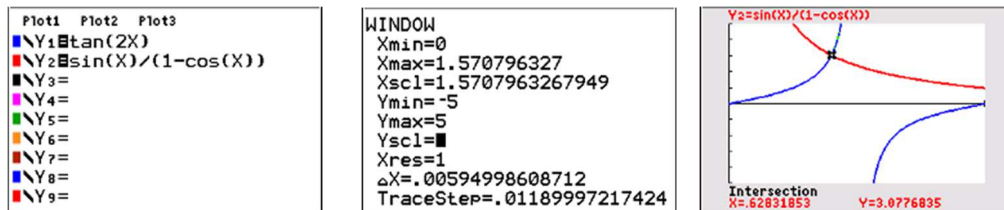
$$\beta = 2\theta \quad \text{e} \quad \tan \beta = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

Para determinar θ , resolve-se graficamente a equação $\tan(2\theta) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$.

No menu *Funções*, inserem-se as expressões $\tan(2\theta)$ e $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$ e define-se uma janela

adequada, atendendo a que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Visualizam-se os gráficos.



Identifica-se o ponto de interseção dos gráficos das funções no respetivo domínio.

θ corresponde à abcissa do ponto de interseção.

$$\theta \approx 0,6283$$

A abcissa do ponto P é dada por $\cos \theta$.

Tomando para θ o valor encontrado, obtém-se $\cos(0,6283) \approx 0,81$.

A abcissa de P é, aproximadamente, 0,81.