Proposta de teste de avaliação [fevereiro – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ **(B)** 1 **(C)** e^3 **(D)** e^2

2. Para um certo número real k, considera a função *f*, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(x+1) & \text{se } x\geq 0\\ 2^k & \text{se } x<0\end{cases}$$

Sabe-se que os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de f e que têm a mesma ordenada e abcissas 26 e $-\sqrt{3}$, respetivamente.

Qual é o valor de *k*?

(A) $\log_2 3$ **(B)** 0 **(C)** $\log_3 2$ **(D)** 3

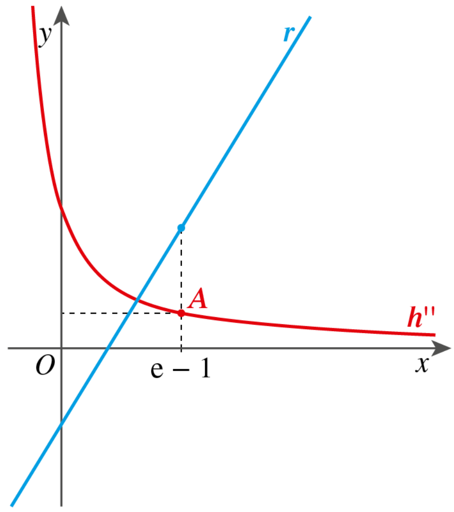
3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{e^{x-1}-1} & \text{se } x>1\\ 2 & \text{se } x=1\\ \dfrac{-2x+2}{x^2-3x+2} & \text{se } x<1\end{cases}$$

Estuda a função *f* quanto à continuidade em $x=1$ e à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4. Considera a função h, de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x)=x\ln(x+1)$.

Na figura estão representados o gráfico de h'' (segunda derivada de h) e uma reta r.



Sabe-se que:

. a reta r é tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $\mathrm{e}-1$;

. o ponto A pertence ao gráfico da função h'' e tem abcissa $\mathrm{e}-1$.

4.1. O declive da reta r é igual a:

(A) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ **(B)** $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ **(C)** $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ **(D)** $2-\frac{1}{\mathrm{e}}$

4.2. Determina a ordenada do ponto A.

5. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

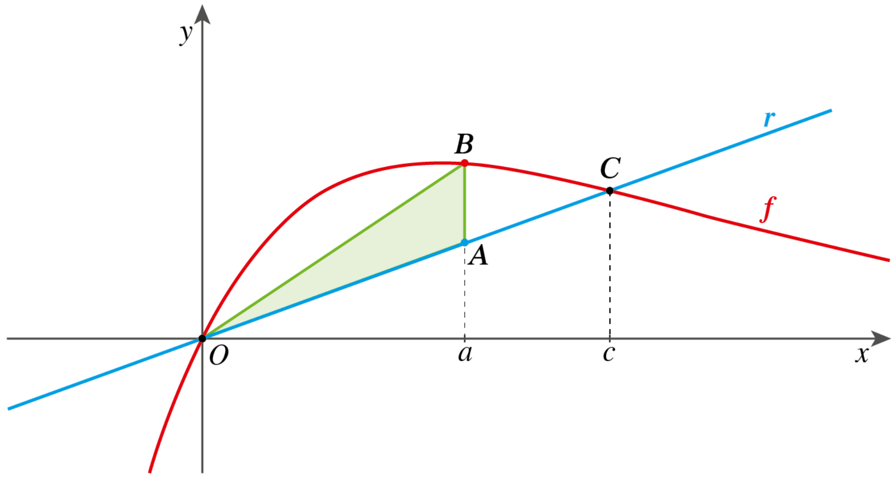
$$f(x)=\sqrt{x}\times\ln x$$

Estuda a função f, por processos exclusivamente analíticos, quanto à monotonia e à existência de extremos.

6. Na figura estão representadas parte do gráfico de uma função *f* definida por:

$$f\left(x\right)=2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

e uma reta *r* definida pela equação $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$.



Sabe-se que:

. *C* é o ponto de interseção da reta *r* com o gráfico de f, de abcissa c, com $c>0$;

. os pontos *A* e *B* são pontos móveis, com a mesma abcissa *a*, com $0<a<c$, em que *A* pertence à reta *r* e *B* pertence ao gráfico de *f*.

A cada posição dos pontos *A* e *B* corresponde um triângulo [*OAB*].

6.1. Por um processo exclusivamente analítico, determina *c* (abcissa do ponto *C*).

6.2. Há dois valores de *a* para os quais a medida da área do triângulo [*OAB*] é igual a 0,25.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de *a*.

Na tua resposta:

. apresenta uma equação que te permita resolver o problema;

. reproduz num referencial o.n. *Oxy* o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(em) resolver a equação;

. apresenta as soluções arredondadas às centésimas.

FIM

Cotações									Total
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
Pontos	15	15	35	15	30	30	30	30	**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: $\alpha\, r$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. $$\lim\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{3n+6-2n-1}{n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e^5}{e^2}=e^3$$

Resposta: Opção **(C)** e^3

2. Sabe-se que $f(26)=f\left(-\sqrt{3}\right)$.

$$\log_3(26+1)=2^k\Leftrightarrow \log_3 27=2^k\Leftrightarrow 2^k=3\Leftrightarrow k=\log_2 3$$

Resposta: Opção **(A)** $\log_2 3$

3. $$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}=\frac{2}{\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{2}{1}=2$$

Fazendo $x-1=y$, se $x\to1$, então $y\to0$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-2x+2}{x^2-3x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-2}{x-2}=2$$

$$f(1)=2$$

Como $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^1}f(x)=f(1)$, conclui-se que *f* é contínua em $x=1$.

As assíntotas verticais não existem, dado que a função é contínua no domínio (em $\mathbb{R}$).

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e}\times\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+2}{x^2-3x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal quando $x\to-\infty$

Resposta: A função é contínua em $x=1$ e a reta $y=0$ é assíntota horizontal.

4.1. $h(x)=x\ln(x+1)$

$$h'(x)=\left(x\ln(x+1)\right)'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$h'(\mathrm{e}-1)=\ln(\mathrm{e}-1+1)+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1+1}=1+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}=2-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Resposta: Opção **(D)** $2-\frac{1}{\mathrm{e}}$

4.2. $h(x)=x\ln(x+1)$

$$h'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$h''(x)=\left(\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$h''(\mathrm{e}-1)=\frac{\mathrm{e}-1+2}{(\mathrm{e}-1+1)^2}=\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}^2}$$

Resposta: A ordenada do ponto *A* é $\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}^2}$.

5. $f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-2}$$

x	0		e^{-2}	$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+
		↘	$f(\mathrm{e}^{-2})$	↗

$$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}^{-2}}\times\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\times(-2)=-\frac{2}{\mathrm{e}}$$

$-\frac{2}{\mathrm{e}}$ é mínimo absoluto de f.

Se $x\in\left]0,\,\mathrm{e}^{-2}\right]$, a função é decrescente.

Se $x\in\left[\mathrm{e}^{-2},+\infty\right[$, a função é crescente.

6.

6.1. $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow x\left(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\Leftrightarrow x=0\ \vee\ -\frac{x}{2}=\ln\left(\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=2\ln(2\mathrm{e})\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\ln\left(4\mathrm{e}^2\right)=2+\ln 4$

Como $c>0$, $c=2+\ln 4$.

Resposta: $c=2+\ln 4$

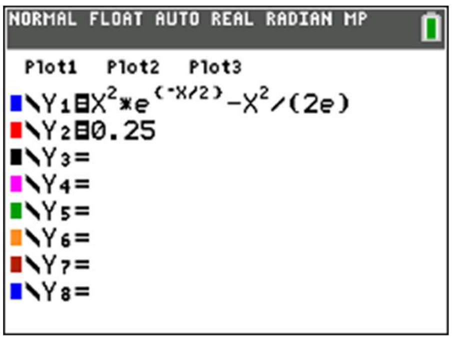
6.2. Seja *A* a área do triângulo definida em função de *a*.

$$A(a)=\left(f(a)-\frac{a}{\mathrm{e}}\right)\times\frac{a}{2}\Leftrightarrow A(a)=\left(2a\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}-\frac{a}{\mathrm{e}}\right)\times\frac{a}{2}\Leftrightarrow A(a)=a^2\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}-\frac{a^2}{2\mathrm{e}}$$

Pretende-se resolver a equação:

$$A(a)=0,25\Leftrightarrow a^2e^{-\frac{a}{2}}-\frac{a^2}{2e}=0,25$$

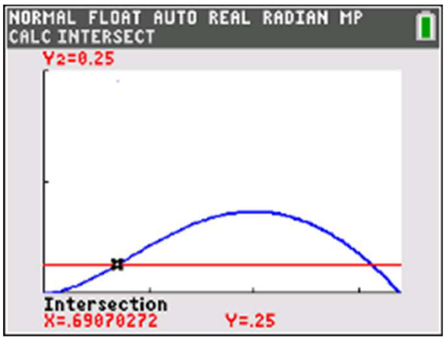
Inserem-se na calculadora as expressões $A(a)$ e 0,25 e determinam-se os pontos de interseção das representações gráficas obtidas.

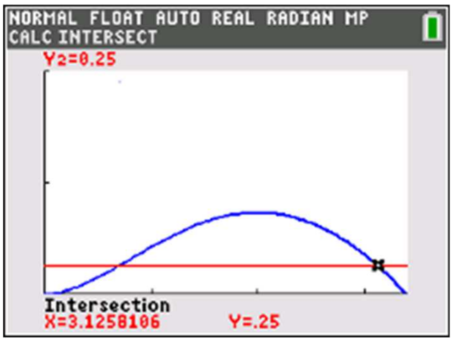


Utilizando uma janela adequada, por exemplo:

Xmin = 0 Xmax = 3,4 Ymin = 0 Ymax = 2

obtém-se:





Conclui-se que $a \approx 0,69 \quad \vee \quad a \approx 3,13$.