MATERICA

Tema	Funções Reais de Variável Real
Conteúdos	Teorema de Bolzano

Ficha de trabalho **Enunciado**

Ex 01.

Seja f uma função contínua, de domínio $[0,6]$ e contradomínio $[2,5]$, Seja g a função de domínio $[0,6]$ definida por: $g(x) = -x + f(x)$. Prova que a função g tem pelo menos um zero.

Ex 02.

Pretende-se aplicar o Teorema de Bolzano a qualquer intervalo do domínio de uma função f. Sabe-se que a função f é uma função da família $f(x) = \begin{cases} ax + 20 & se \ \ x \geq 4 \\ x^2 - a^2 & se \ x < 4 \end{cases}$. Define a função f.

Ex 03.

De uma função f, contínua no intervalo $[0,3]$, sabe-se que $f(0) = 10$ e $f(3) = 0$. Mostra que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0,3[$.

Ex 04.

Seja $f(x) = x^3 - x + 4$. Determina o conjunto de valores de k para os quais o teorema de Bolzano permite concluir que a equação $f(x) = k$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,2[$.

Ex 05.

Seja f definida por: $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & se \ x < 1 \\ 2 & se \ x = 1 \\ bx + 1 & se \ x > 1 \end{cases}$. Determina os valores para *a* e *b* de modo que o teorema de Bolzano se possa aplicar à função f no intervalo $[1,3]$ mas não no intervalo $[0,1]$.

Ex 06.

Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que$h(a) = 2$ e $h(b) = -5$. Indica o conjunto dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais o teorema de Bolzano garante que a função g definida por $g(x) = h(x) + k$ tem pelo menos um zero em $]a,b[$.

Ex 07.

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e tal que $f(a) = 3$ e $f(b) = -1$. Justifica que o domínio da função g definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ não pode ser $[a,b]$.

Ex 08.

Para cada valor de k, real, a expressão $f(x) = x^3 - 8x + k$ define uma função. Determina k de modo que a função f tenha, pelo menos, uma raíz real em $]0,1[$.

Ex 09.

Sejam f e g duas funções contínua em $[a,b]$ tais que $f(a) = g(b)$ e $f(b) = g(a)$. Mostra que o gráfico de $f - g$ interseta pelo menos uma vez o eixo das abcissas no intervalo $[a,b]$.

Ex 10.

Considera a função f, de domínio $]-\infty, 1]$, definida por: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-3}{x-4}$

10.1. Utilizando métodos analíticos, mostra que o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes pares em pelo menos um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-1,0[$.

10.2. Sabendo que no intervalo considerado só existe um ponto nas condições enunciadas na alínea anterior, determina, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Apresenta o valor obtido arredondado às centésimas Reproduz o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Ex 11.

Considere as funções f definidas por uma expressão do tipo $f(x) = k - x^3$, sendo k um número real positivo.

Determina o conjunto de valores de k para os quais o Teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir a existência de um zero de f no intervalo $]0,k[$

Ex 12.

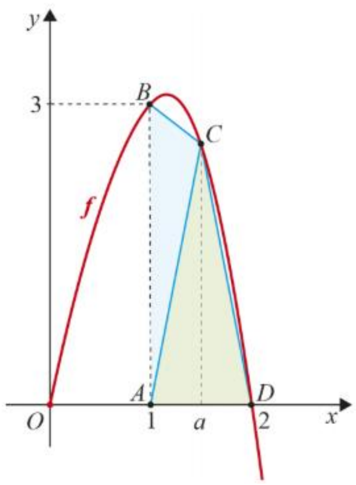
Seja f a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = -x^3 + 4x$

Na figura está representada, num referencial o.n. *Oxy*, parte do gráfico da função f.

Para cada número real a pertencente ao intervalo $]1,2[$ seja *C* o ponto do gráfico de f de abcissa *a*.

Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas $(1,0)$
- *B* e *D* são pontos do gráfico de f de abcissas, respetivamente, 1 e 2

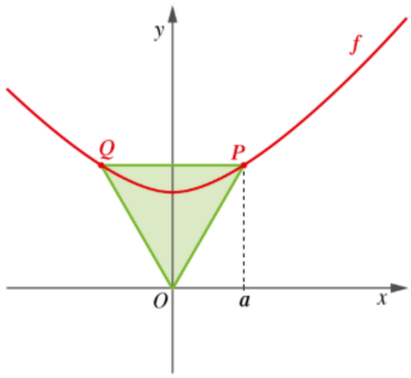


Exprime, em função de a, cada uma das áreas dos triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$. De seguida, recorre ao Teorema de Bolzano para mostrar que existe um valor de a pertencente ao intervalo $]1, 2[$, para o qual as medidas das áreas dos triângulos são iguais.

Ex 13.

Considera a função f par, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Na figura está representada parte do gráfico de f e o triângulo $[OPQ]$.



Sabe-se que:

- P e Q pertencem ao gráfico de f;
- a é a abcissa de P, com $a > 0$;
- a reta PQ é paralela a Ox.

Seja g a função que a cada valor de a faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$

13.1. Mostra que $g(a) = a\sqrt{a^2 + 4}$

13.2. Mostra que existe um valor de $a \in]1, 2[$ tal que o valor da medida da área do triângulo é $\sqrt{28}$.